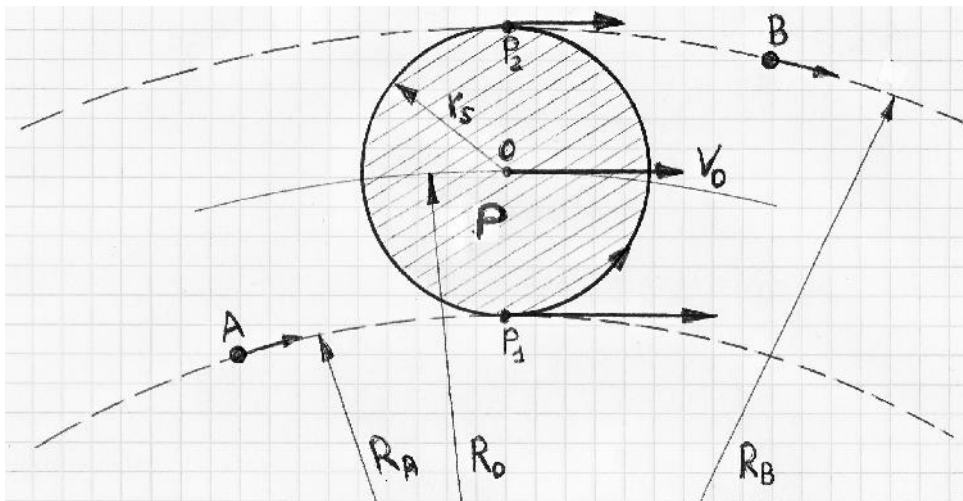


estratto da : **L'EQ. UNIVERSALE**
dalla meccanica celeste alla fisica nucleare
 – schiacciamento polare dei pianeti del Sistema Solare

Osserviamo innanzitutto che, se pure iniziamo a descrivere l'evoluzione dello spazio fisico partendo da una distribuzione uniforme dei suoi punti, il fatto che si possa avere equilibrio stabile solo su orbite a distanze ben precise dal centro porta ad un aumento progressivo della densità dei punti materiali in corrispondenza di queste zone secondo il meccanismo indicato in figura.



La sfera materiale di raggio r_p , in equilibrio sull'orbita di raggio R_0 dello spazio rotante K_s^2 , si muove con la velocità orbitale :

$$V_0 = \left(\frac{K_s^2}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Le velocità di equilibrio dei punti periferici P_1 e P_2 risultano invece :

$$v_1 = \left(\frac{K_s^2}{R_A} \right)^{\frac{1}{2}} > v_0 \quad ; \quad v_2 = \left(\frac{K_s^2}{R_B} \right)^{\frac{1}{2}} < v_0$$

Il punto P_1 , solidale con la sfera planetaria, si muove dunque con una velocità minore di quella di equilibrio e quindi è soggetto ad un'accelerazione radiale

che tende ad avvicinarlo al centro dello spazio rotante centrale K_s^2 .

Esattamente il contrario accade al punto P_2 , che tende invece ad allontanarsi dal centro.

In definitiva, l'azione dello spazio rotante centrale sulla superficie della sfera tende a disgregarla, in contrasto con l'accelerazione gravitazionale propria della sfera, che invece ha tendenza ad aggregare.

Se consideriamo aggregati liberi, di piccole dimensioni, in orbita nella fascia occupata dalla sfera planetaria P , la loro reale velocità orbitale di equilibrio è

data in ogni punto dalla relazione :

$$V = \left(\frac{K_s^2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

L'aggregato **A** si muove con una velocità maggiore di quella di rivoluzione della sfera e quindi raggiunge la superficie depositandosi e trasferendo alla sfera un impulso che tende ad imprimere una rotazione nel verso antiorario, in figura.

L'aggregato **B** si muove invece più lentamente della sfera e quindi, in questo caso, è quest'ultima che raggiunge **B** e lo acquisisce sulla superficie.

L'impulso che la sfera cede all'aggregato tende ancora ad imprimere una rotazione nel verso antiorario.

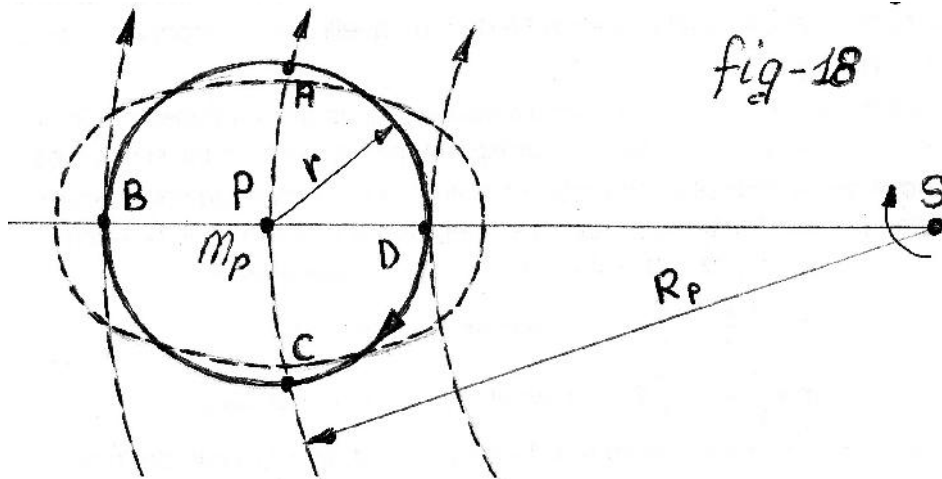
L'acquisizione di aggregati in superficie con questo meccanismo, crea quindi complessivamente un momento che imprime alla sfera una rotazione su se stessa in verso antiorario.

La condizione di equilibrio verrà raggiunta quando il momento trasferito dalle masse acquisite si annulla, ossia quando la velocità periferica di rotazione su se stessa della sfera planetaria coincide con quella di scorrimento imposta a P_1 e P_2 dallo spazio rotante centrale K_s^2 :

Indicando con v_s la velocità di rotazione, sarà dunque :

$$2 \cdot v_s = V_1 - V_2$$

Consideriamo quindi l'analisi quantitativa e gli effetti che si producono in uno spazio rotante quando si ha in orbita un aggregato materiale di dimensioni non trascurabili.



Supponiamo di avere il punto **P** in moto sull'orbita stabile di raggio R_P dello spazio rotante generato dalla sfera solare **S**.

Consideriamo ancora i quattro punti, **A**, **B**, **C**, **D**, anch'essi in orbita nello stesso spazio rotante ad una distanza r dal punto **P**.

Le velocità orbitali di equilibrio di ciascun punto valgono :

$$V_A = V_C = V_P = \left(\frac{K_S^2}{R_P} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$V_B = \left(\frac{K_S^2}{R_P + r} \right)^{\frac{1}{2}} ; \quad V_D = \left(\frac{K_S^2}{R_P - r} \right)^{\frac{1}{2}}$$

La velocità di scorrimento relativo tra i punti **A**, **C**, e **P** è nulla, per cui il punto **P** imprime ad essi un'accelerazione gravitazionale :

$$a_{PA} = a_{PC} = - \frac{K_P^2}{r^2}$$

Se si deriva la relazione che viene verificata nelle condizioni di equilibrio :

$$V^2 \cdot R = K^2$$

si ottiene :

$$\frac{dV}{dR} = - \left(\frac{K_S^2}{4 \cdot R_P^3} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se dunque si assume $r \ll R_P$, si può scrivere :

$$\Delta V = - \left(\frac{K_S^2}{4 \cdot R_P^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \Delta R$$

Con $\Delta R = r$ si ricavano le velocità di scorrimento relative :

$$V_{DP} = \left(\frac{K_S^2}{4 \cdot R_P^3} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot r \quad ; \quad V_{BP} = - V_{DP}$$

Ai punti **B** e **D** vengono dunque impresse dal punto **P** le accelerazioni reali :

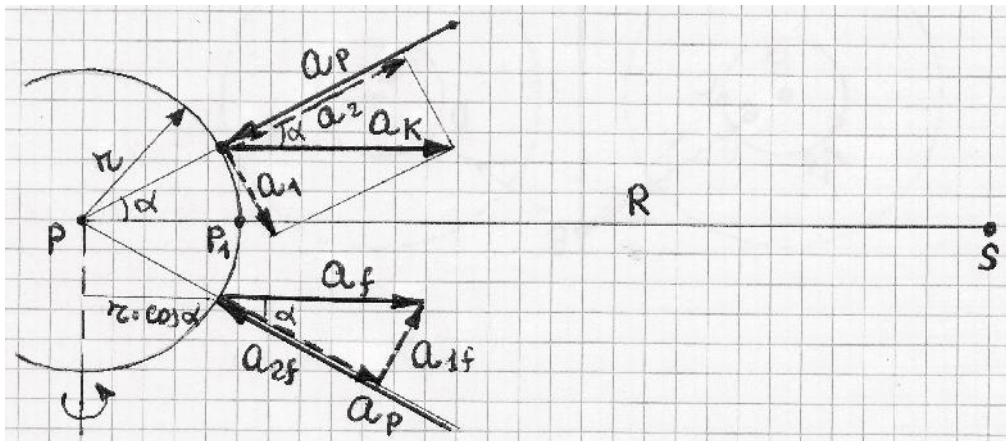
$$\begin{aligned} a_{PB} = a_{PD} &= \frac{v_s^2}{r} - \frac{K_P^2}{r^2} = \frac{K_S^2}{4 \cdot R_P^3} \cdot r - \frac{K_P^2}{r^2} = \\ &= \frac{K_P^2}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{K_S^2}{K_P^2} \cdot \left(\frac{r}{R_P} \right)^3 - 1 \right] \end{aligned}$$

Sui punti A – C e B – D la massa planetaria P manifesta una diversa azione gravitazionale, per la sola presenza dello spazio rotante K_s^2 .

La differenza di accelerazione risulta :

$$\Delta a = \frac{K_s^2}{4 \cdot R_p^3} \cdot r$$

Se il moto rotorivolvente della sfera planetaria è sincrono, ovvero con periodo di rotazione T_p uguale a quello di rivoluzione T_n , i punti che si trovano lungo la congiungente sono sempre gli stessi, per cui l'effetto prodotto da queste differenti pressioni diventa una deformazione del sistema come è indicato in figura 18.



Più in generale, se sulla superficie della sfera planetaria ci spostiamo entro l'angolo solido α , la componente radiale dell'accelerazione centrifuga dovuta allo spazio rotante centrale risulta :

$$\begin{aligned} a_2 &= a_K \cdot \cos \alpha = \left(\frac{K_s^2}{4 \cdot R_p^3} \right) \cdot r \cdot \cos^2 \alpha = \\ &= \left(\frac{K_s^2}{8 \cdot R_p^3} \right) \cdot r \cdot (1 + \cos 2\alpha) \end{aligned}$$

L'accelerazione gravitazionale complessiva, che tende a schiacciare la sfera verso il centro risulta :

$$a_r = \frac{K_p^2}{r^2} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \frac{K_s^2}{K_p^2} \cdot \left(\frac{r}{R_p} \right)^3 \cdot (1 + \cos 2\alpha) - 1 \right]$$

La componente dovuta allo spazio rotante centrale K_s^2 diventa massima per

$$\alpha = 0 \text{ e si annulla per } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

L'azione che tende a sgretolare la superficie del pianeta raggiunge dunque il valore massimo lungo la congiungente e si annulla sul piano perpendicolare a quello di rivoluzione.

La componente tangenziale a_1 produce invece uno scorrimento superficiale verso il punto P_1 e vale :

$$a_1 = a_k \cdot \text{sen} \alpha = \left(\frac{K_s^2}{4 \cdot R_p^3} \right) \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha$$

e quindi :

$$a_1 = \left(\frac{K_s^2}{8 \cdot R_p^3} \right) \cdot r \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Per $\alpha = 0$ entrambe le azioni sono nulle ed aumentano gradualmente con α .

Per $\alpha = \frac{\pi}{4}$, l'azione di scorrimento raggiunge il valore massimo per poi

annullarsi in corrispondenza di $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dove l'azione gravitazionale è solo

di schiacciamento .

E' chiaro che sia lo schiacciamento che lo scorrimento saranno più o meno vistosi in rapporto alla fluidità della sfera.

In ogni caso, se il moto rotorivolvente è sincrono, la sfera iniziale tenderà ad assumere una forma cilindrica con l'asse disposto lungo la congiungente e il processo di allungamento avrà termine quando si verificherà $a_p = 0$.

Nel caso di moto sincrono, il valore della velocità di scorrimento tra un punto della superficie ed il centro della sfera planetaria risulta dalla relazione :

$$T_p = T_n ; \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v_{ss}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p}{V_n} \text{ da cui : } v_{ss} = \frac{K_s}{R_p^{\frac{3}{2}}}$$

esattamente metà della velocità di scorrimento imposta dallo spazio rotante centrale. Si avrà dunque :

$$\left[\frac{K_s^2}{K_p^2} \cdot \left(\frac{r}{R_p} \right)^3 - 1 \right] = 0$$

Nella forma schiacciata, si ricava il raggio massimo :

$$r_{\max} = \left(\frac{K_p^2}{K_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p$$

Si deve tener presente che r_{\max} si applica ai punti superficiali solidali con la sfera planetaria.

I punti che si muovono in equilibrio su orbite indipendenti dello spazio rotante centrale K_s^2 , alla distanza r_{\max} dal centro della sfera planetaria, presentano una velocità di scorrimento, rispetto al centro del pianeta, doppia di v_{ss} , per cui si allontanano seguendo la loro orbita con una minima perturbazione.

Se la sfera planetaria P ruota su se stessa come, per esempio, accade al nostro pianeta, anche se la velocità di rotazione è molto bassa e tale da poter trascurare l'accelerazione centrifuga, il punto P_1 viene sostituito dall'equatore

e tutta la zona equatoriale viene così interessata, durante il moto di rotazione, da una minore azione gravitazionale, che risulta invece massima verso i poli.

Questa situazione, protratta nel tempo, produce schiacciamento permanente in corrispondenza dei poli ed aumento del raggio equatoriale.

Per quanto riguarda invece l'azione di scorrimento superficiale, sarà nulla in corrispondenza dei poli e lungo tutto l'equatore, mentre risulterà massima in

prossimità dell'angolo $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Questo vuol dire che, se sulla superficie della sfera abbiamo uno strato fluido a bassa densità, esso avrà tendenza ad accumularsi soprattutto ai poli e in prossimità dell'equatore nella direzione della sfera S , che genera lo spazio rotante centrale K_s^2 .

Per il nostro pianeta si ha, per esempio, una grande massa d'acqua ferma in prossimità dei due poli ed un'altra che si accumula e si sposta continuamente lungo l'equatore, seguendo la direzione del Sole e della Luna.

Lo scorrimento superficiale di queste grandi masse d'acqua, normalmente, viene indicato come maree.

Si deve notare che nel fenomeno delle maree le forze centrifughe non hanno alcun ruolo, in quanto si tratta di forze fittizie e quindi assolutamente incapaci di produrre spostamenti di masse con produzione di lavoro.

D'altra parte, esse hanno sempre direzione perpendicolare al moto e quindi il lavoro sviluppato risulta, in ogni caso, nullo.

A titolo puramente esplicativo, calcoliamo la componente di marea prodotta, sulla Terra, dal Sole e dalla Luna separatamente.

$$a_{1s} = \left(\frac{K_s^2}{4 \cdot R_{ST}^3} \right) \cdot r_T = \frac{132,725 \cdot 10^9 \frac{K_m^3}{\text{sec}^2}}{4 \cdot (149,6 \cdot 10^6 K_m)^3} \cdot 6378 \text{ Km} = 6,32095 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

$$a_{1L} = \left(\frac{K_L^2}{4 \cdot R_{TL}^3} \right) \cdot r_T = \frac{4904,76 \frac{K_m^3}{\text{sec}^2}}{4 \cdot (384400 K_m)^3} \cdot 6378 \text{ Km} = 13,7687 \cdot 10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

La Luna esercita dunque sulla Terra un'azione circa doppia di quella solare. Per quanto riguarda l'azione di schiacciamento, abbiamo :

$$a_{ss} = \frac{1}{4} \cdot \frac{K_S^2}{K_T^2} \cdot \left(\frac{r_T}{R_{ST}} \right)^3 = 1,2366 \cdot 10^{-9}$$

$$a_{sL} = \frac{1}{4} \cdot \frac{K_L^2}{K_T^2} \cdot \left(\frac{r_T}{R_{LT}} \right)^3 = 14,046 \cdot 10^{-9}$$

In questo caso l'azione della Luna risulta addirittura circa 10 volte maggiore di quella solare.

Se la velocità di rotazione v_p della sfera planetaria su se stessa risulta tale da produrre un'accelerazione centrifuga non trascurabile rispetto al valore di quella gravitazionale, abbiamo :

$$a_f = \frac{v_p^2}{r} \cdot \cos\alpha$$

la componente radiale, che si oppone all'azione gravitazionale, vale :

$$a_{f2} = a_f \cdot \cos\alpha = \frac{v_p^2}{r} \cdot \cos^2\alpha$$

L'azione che produce schiacciamento risulta dunque :

$$a_p = a_{2f} - \frac{K_p^2}{r^2} = \frac{K_p^2}{r^2} \cdot \left[\frac{v_p^2}{V_{eqp}^2} \cdot \cos^2\alpha - 1 \right]$$

Per i pianeti del Sistema Solare, con $\alpha = 0$, si ricava lo schiacciamento che viene riportato nella tabella seguente.

valore teorico del rigonfiamento equatoriale

pianeta	$v_p \left(\frac{K_m}{sec} \right)$	$V_{eqp} \left(\frac{K_m}{sec} \right)$	$\frac{v_p^2}{V_{eqp}^2}$	$1 - \frac{r_p}{r_e}$
Mercurio	0,003026	3,00525	$1,013 \cdot 10^{-6}$	0
Venere	0,00181	7,32698	$61,02 \cdot 10^{-9}$	0
Terra	0,46511	7,90697	0,00346	0,00335
Marte	0,24117	3,55130	0,00461	0,00677
Giove	12,580	42,0977	0,089298	0,06488
Saturno	9,870	25,0882	0,154773	0,09796
Urano	2,590	15,0569	0,029589	0,02293
Nettuno	2,680	16,6147	0,026018	0,01708
Plutone	0,013207	0,88772	0,000221	0
Sole	1,99270	436,688	0,000021	0,001

Considerando l'approssimazione dei calcoli e che non sono state apportate correzioni alle velocità di rotazione che tenessero conto del fatto che i pianeti gassosi non ruotano come sfere rigide e dunque la velocità media risulta più piccola, mentre il Sole ha un nucleo di grandi dimensioni (circa **136000** K_m) che ruota ad elevata velocità e quindi ne risulta una velocità media più alta, l'accordo dei valori teorici con quelli forniti dall'osservazione risulta più che accettabile.

La componente a_{1f} , che produce uno scorrimento verso l'equatore, vale :

$$a_{1f} = a_f \cdot \text{sen}\alpha = \frac{v_p^2}{r} \cdot \text{cos}\alpha \cdot \text{sen}\alpha = \frac{v_p^2}{2 \cdot r} \cdot \text{sen}(2\alpha)$$

Il suo valore risulta nullo all'equatore e ai poli, mentre raggiunge il massimo

per $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Sui pianeti che presentano uno strato superficiale fluido, come per esempio sulla Terra, esso verrà rimosso dalla zona corrispondente al massimo e verrà accumulato dove questa azione si annulla.

La rimozione di questi strati dà origine alla nota forma a pera

L'espressione dell'accelerazione che la sfera planetaria esercita sui punti **B** e **D** dello spazio fisico circostante, ci consente di calcolare il limite assoluto entro il quale è possibile rilevare gli effetti dell'azione attrattiva che esercita lo spazio rotante K_p^2 .

Ponendo $a_{pD} = 0$, si ottiene :

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{K_s^2}{K_p^2} \cdot \left(\frac{r_{pmax}}{R_p} \right)^3 - 1 = 0$$

da cui :

$$r_{pmax} = \left(4 \cdot \frac{K_p^2}{K_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p$$

Osservando la figura 18, si vede che gli spazi rotanti solare e planetario, K_s^2 e K_p^2 , lungo la congiungente, dove l'azione solare è massima, impongono alla generica orbita di raggio r una rotazione in versi opposti ed il valore r_{pmax} corrisponde a quello in corrispondenza del quale la velocità di rivoluzione imposta dallo spazio rotante K_p^2 risulta uguale ed opposta alla velocità di scorrimento imposta da K_s^2 .

Si ha infatti :

$$\left(\frac{K_p^2}{r_{pmax}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{K_s}{2 \cdot R_p^{\frac{3}{2}}} \cdot r_{pmax}$$

da cui si ricava l'espressione di r_{pmax} .

Per i punti che si trovano alla distanza r_{pmax} dal centro della sfera planetaria, la velocità di rivoluzione attorno al centro P viene annullata dalla velocità di scorrimento imposta dallo spazio rotante centrale K_s^2 e dunque conservano, nel tempo, un orientamento costante rispetto al punto P . Partendo da questa condizione, con i punti B e D, "fermi sulla congiungente"

SP, un loro accostamento al centro P comporta una variazione della velocità relativa di scorrimento rispetto a P , secondo la relazione :

$$\Delta V_s = - \frac{K_s}{2 \cdot R_p^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta r$$

che produce nei punti che si trovano sull'orbita una rotazione nel verso orario, concorde con quello imposto dallo spazio rotante K_p^2 .

Anche la velocità di rotazione imposta da K_p^2 varia secondo la nota relazione

$$V^2 = \frac{K_p^2}{r}, \text{ che, differenziata fornisce : } \Delta V_p = - \frac{K_p}{2 \cdot r^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta r .$$

Dovendo Δr verificare entrambe le relazioni, l'equilibrio sarà stabile solo in corrispondenza dei punti in corrispondenza dei quali si verifica $\Delta V_s = \Delta V_p$.

Si ricava così il valore del raggio r_p della sfera planetaria che consente allo spazio rotante K_p^2 di muoversi in equilibrio all'interno di K_s^2 .

Poniamo dunque :

$$\frac{K_s}{2 \cdot R_p^{\frac{3}{2}}} = \frac{K_p}{2 \cdot r_p^{\frac{3}{2}}}$$

da cui si ottiene la relazione fondamentale :

$$r_p = \left(\frac{K_p^2}{K_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p = \left(\frac{m_p}{m_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p$$

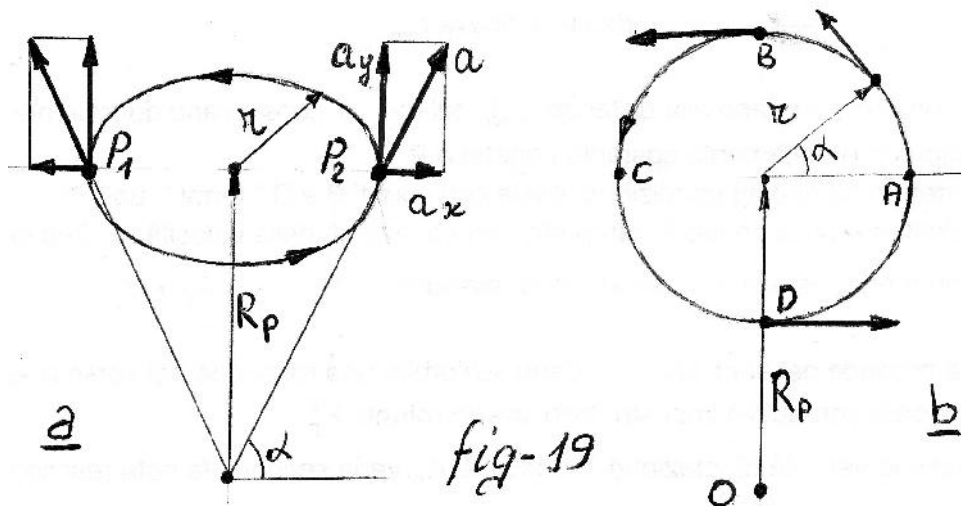
Dunque, la sfera di raggio r_{pmax} , con orientamento fisso nello spazio, non è stabile e si riduce a quella di raggio r_p alla quale viene impresso da K_p^2 un moto di rotazione su se stessa con periodo :

$$\begin{aligned} T_p &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r_p}{v_p} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_p}{\left(\frac{K_p^2}{r_p} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_p^{\frac{3}{2}}}{K_p} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p^{\frac{3}{2}}}{K_s} = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p}{\left(\frac{K_s^2}{R_p} \right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p}{V_n} = T_n = \text{periodo di rivoluzione} \end{aligned}$$

La condizione di equilibrio prevede dunque che lo spazio rotante K_p^2 abbia, attraverso la sfera planetaria r_p , una "rotazione sincrona" con periodo di rotazione T_p uguale a quello di rivoluzione T_n .

Questa situazione tendenziale si verifica realmente su quasi tutti i satelliti del Sistema Solare.

Consideriamo, a questo punto, le azioni che vengono esercitate dallo spazio rotante centrale su un sistema esteso, non necessariamente sferico, rotante su se stesso, di cui, per semplicità, prendiamo in esame solo due punti P_1 e P_2 diametralmente opposti, come in figura 19.



Su ciascun punto rotante il centro **O** imprime l'accelerazione :

$$a = \left(\frac{v_r^2}{R} - \frac{K^2}{R^2} \right)$$

che si può anche scrivere :

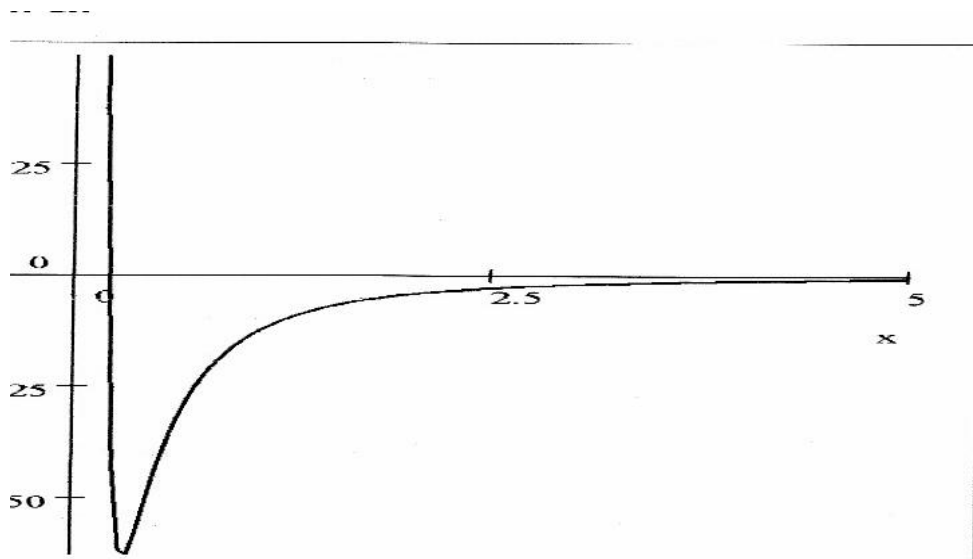
$$a = \frac{1}{R^2} \cdot (v_r^2 \cdot R - K^2)$$

Ponendo $a = 0$ si ricava la condizione di equilibrio : $R = \frac{K^2}{v_r^2}$.

Per avere un'orbita stabile è però necessario che il sistema sia retroazionato negativamente, in modo che ad un aumento del raggio **R** corrisponda una riduzione dell'accelerazione centrifuga **a** . Derivando l'espressione di **a** , si ricava dunque :

$$\frac{da}{dR} = \frac{1}{R^3} \cdot (2 \cdot K^2 - v_r^2 \cdot R)$$

che presenta l'andamento indicato nella figura seguente.



ponendo $\frac{da}{dR} = 0$, si ricava il valore minimo del raggio necessario per

avere un'orbita stabile ; si ottiene così :
$$R_{\min} = \frac{2 \cdot K^2}{v_r^2}.$$

Per $R < R_{\min}$ non si hanno orbite stabili in quanto, fissata la velocità v_r , ad una variazione del valore del raggio corrisponde una variazione dello stesso segno dell'accelerazione centrifuga.

Per ogni valore del raggio R esiste un valore minimo della velocità capace di rendere stabile l'orbita.

Se, per esempio, il sistema rotante rappresentato in figura 19a si trova sulla superficie terrestre, la rotazione potrà essere stabile con l'orbita indicata solo se la velocità di rotazione risulta :

$$v_r \geq \left(\frac{2 \cdot K_T^2}{r_T} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2 \cdot 398754 \frac{K_m^3}{\text{sec}^2}}{6378 K_m} \right)^{\frac{1}{2}} = 11,182 \frac{K_m}{\text{sec}}$$

coincidente con la velocità di fuga .

Se la velocità di rotazione è minore del valore minimo, la configurazione di figura 19a non è stabile ed evolve rapidamente come è indicato nella figura 19b.

Essendo le velocità di rotazione generalmente piuttosto basse, **tutti i sistemi di spazi rotanti interagenti avranno sempre tendenza ad assumere la configurazione di equilibrio con il piano di rotazione coincidente con quello di rivoluzione.**

Del resto, la tendenza al parallelismo degli assi di rotazione e di rivoluzione è un dato verificato in tutte le osservazioni astronomiche e non solo.

Con la disposizione di figura 19b, la componente dell'accelerazione dovuta alla rotazione non si mantiene costante su tutta la traiettoria, ma vale :

$$a = \frac{\left(v_r \cdot \cos\beta \right)^2}{R}$$

con qualche semplice sostituzione, si ottiene :

$$a = \frac{v_r^2}{R} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + \cos 2\beta) .$$

Essa risulta dunque variabile con periodo avente valore pari a metà di quello di rotazione di P_1 e P_2 .

Alla componente sinusoidale dell'accelerazione si associa una oscillazione dell'asse di rotazione con lo stesso periodo.

Le situazioni che sono state descritte risultano, praticamente tutte, in perfetto accordo con le osservazioni astronomiche.

Bisogna ancora osservare che il fatto che venga verificata oppure no la quantizzazione delle orbite planetarie, ci fornisce anche indicazioni sul meccanismo di formazione degli aggregati.

Secondo i risultati che abbiamo ottenuto, il loro posizionamento e la loro crescita devono infatti avvenire certamente utilizzando i materiali

provenienti dallo spazio rotante di ordine superiore e comunque dal confine dello spazio rotante considerato.

Solo così è imposta la quantizzazione, mentre con una esplosione nel centro si possono ottenere detriti stabili in qualsiasi posizione, secondo la relazione $V^2 \cdot R = K^2$, senza alcuna condizione.

Certamente rilevante risulta il meccanismo attraverso il quale lo spazio rotante riesce a generare e mantenere la rotazione di tutto ciò che si trova in esso attraverso un'azione continua, senza dover ricorrere ad un dubbio " impulso iniziale ".

Se, su un'orbita, prendiamo in considerazione un intero periodo di rivoluzione T , possiamo assumere una velocità longitudinale media V sul percorso di

raggio medio R e si ottiene :
$$V = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T}$$

Imponendo l'equilibrio in direzione radiale, si ricava :

$$a_r = \frac{K^2}{R^2} = R \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R}$$

ossia :
$$\frac{V^2}{R} = \frac{K^2}{R^2} \quad ; \quad \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^2}{T^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{K^2}{R^2}$$

da cui derivano le equazioni fondamentali degli spazi rotanti :

$$V^2 \cdot R = K^2 \quad ; \quad \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot R^3}{T^2} = K^2$$

che permettono di esprimere i valori dei parametri orbitali in condizioni di

equilibrio :
$$V_{eq} = \left(\frac{K^2}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad T_{eq} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^{\frac{3}{2}}}{K}$$

Dunque, abbiamo visto che i punti dello spazio fisico circostante un aggregato materiale rotante su se stesso raggiungono la condizione di equilibrio con un moto su particolari orbite, circolari e discrete, che vengono caratterizzate dai valori :

$$R_n = \frac{R_1}{n^2} \quad ; \quad V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R_n}$$

Tra due orbite consecutive R_n ed R_{n+1} non è possibile trovare alcuna orbita circolare di equilibrio stabile.

Se dunque, sull'orbita dello spazio rotante avente raggio R_n , mettiamo una particella materiale avente velocità v^2 rispetto al centro dello spazio rotante, se risulta $v^2 < V_{eq}^2$, su di essa si manifesta un'azione risultante equivalente ad un'accelerazione centripeta (attrattiva) e quindi si muove verso il centro.

Se invece risulta $v^2 > V_{eq}^2$, l'accelerazione che si genera risulta centrifuga (repulsiva) e la particella si allontana dal centro.

Se, infine, $v^2 = V_{eq}^2$, la particella risulta in equilibrio e si mantiene ad una distanza dal centro $R_n = \text{costante}$.

Tutte queste circostanze possono essere verificare facilmente considerando il problema sotto l'aspetto energetico.

Il lavoro che lo spazio rotante compie per spostare la massa m da $R = \infty$ alla distanza R dal centro vale:

$$L = \int_{\infty}^R F(R) dR = \int_{\infty}^R - \frac{K^2}{R^2} m dR = m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se si considera il sistema conservativo, la massa m acquista una energia potenziale:

$$E_p = -L = -m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se indichiamo con E_c il valore dell'energia cinetica posseduta dalla massa in moto verso il centro, la sua energia totale, in ogni istante, risulta:

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V_r^2 - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se alla massa considerata alla distanza $R = \infty$ viene assegnata un'energia $E_c = E_p = 0$, in assenza di processi dissipativi o perturbazioni provenienti dall'esterno, per il principio di conservazione dell'energia, in qualsiasi punto dovrà essere :

$$E = E_c + E_p = 0$$

Per le masse provenienti dall'esterno dello spazio rotante si dovrà dunque sempre avere :

$$E_c = -E_p = m \cdot \frac{K^2}{R} \quad \text{ossia :} \quad \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_r^2 = m \cdot \frac{K^2}{R}$$

da cui deriva :

$$V_r = \sqrt{2} \cdot V$$

Per un punto dello spazio in equilibrio con la velocità orbitale V , la energia fornita dallo spazio rotante si divide equamente in energia cinetica orbitale :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K^2}{R}$$

ed energia di legame E_l con lo spazio rotante centrale e risulta comunque :

$$E_c + E_l - m \cdot \frac{K^2}{R} = 0 \quad \text{con} \quad E_l = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2.$$

Consideriamo ora il caso più generale in cui il punto materiale considerato, per una qualsiasi ragione, non abbia energia nulla e quindi si abbia :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\dot{R}^2 + (R \cdot \dot{\vartheta})^2 \right] - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

dalla quale si ricava :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \frac{2 \cdot K^2}{R} - (R \cdot \dot{\vartheta})^2$$

Se il momento delle forze esterne, rispetto al centro di rotazione, vale zero, si verifica la conservazione del momento angolare e quindi si ha :

$$(R \cdot \dot{\vartheta})^2 = \frac{C^2}{R^2}$$

che, sostituita nella precedente relazione, fornisce :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 - \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2$$

Se viene verificato anche il principio di conservazione dell' energia, si ha anche $E = \text{costante}$ e quindi si può porre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 = \alpha^2 \\ \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2 = u^2 \end{array} \right.$$

da cui si ricava :

$$du = - \frac{C}{R^2} dR$$

sostituendo, si ottiene l' equazione differenziale :

$$\dot{R}^2 = \alpha^2 - u^2$$

equivalente a:

$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\alpha^2 - u^2}$$

Questa relazione ha un campo di esistenza, dunque si può realizzare, fisicamente, solo per :

$$\alpha^2 \geq u^2$$

e quindi per :

$$\frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 \geq \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2$$

ovvero :

$$\frac{2 \cdot E}{m} \cdot R^2 + 2 \cdot K^2 \cdot R - C^2 \geq 0$$

che si può anche scrivere :

$$\left[\frac{2 \cdot E}{m} \cdot R + 2 \cdot K^2 \right] \geq \frac{C^2}{R}$$

Ricordando che :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V^2 - m \frac{K^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot m v^2 - m V_{eq}^2$$

si ha :

$$\frac{2 \cdot E}{m} = v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \quad \text{con} \quad V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R}$$

In definitiva quindi, per poter avere soluzioni reali, dovrà essere verificata la condizione fondamentale :

$$\left[v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right] \cdot R + 2 \cdot K^2 \geq \frac{C^2}{R}$$

Il valore della costante C si ricava considerando la relazione con la velocità areolare del punto sull'orbita :

$$V_a = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot R \cdot dl}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 \cdot \dot{\vartheta}) = \frac{C}{2}$$

si ha dunque, in definitiva : $C = 2 \cdot V_a$

Su ogni orbita circolare di raggio R_n , si avrà quindi :

$$C_n = V_n \cdot R_n = K \cdot R_n^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad V_{eqn} = \left(\frac{K^2}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In uno studio grafico dello spazio rotante, si avrà dunque la serie di curve :

$$\left[v^2 - 2 \cdot V_{eqn}^2 \right] \cdot R + 2 \cdot K^2 \geq \frac{C_n^2}{R}$$

Per una più facile lettura dei risultati grafici, risolviamo anche analiticamente il sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}^2 = \left[v^2 - 2 \cdot V_{eqn}^2 \right] + \frac{2 \cdot K^2}{R} - \left[R \cdot \dot{\vartheta} \right]^2 \\ R^2 \cdot \dot{\vartheta} = C \end{array} \right\}$$

equivalente a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\alpha^2 - u^2} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{R^2} \end{array} \right\}$$

da cui deriva l'equazione :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \pm \frac{C}{R^2 \sqrt{\alpha^2 - u^2}}$$

essendo :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \frac{d\vartheta}{du} \cdot \frac{du}{dR} = - \frac{C}{R^2} \cdot \frac{d\vartheta}{du}$$

sostituendo si ottiene :

$$d\vartheta = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \cdot du \quad \text{con } \alpha^2 > u^2$$

Integrando, si ricava l'equazione della traiettoria :

$$R = \frac{P}{1 + e \cdot \cos \theta} ; P = \frac{C^2}{K^2} ; e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} [v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2]}$$

Per tutto lo spazio rotante, con semplici sostituzioni si ricava :

$$P_n = \frac{C_n^2}{K^2} = \frac{K^2 \cdot R_n}{K^2} = R_n$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{R_n}{K^2} \left[v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right]} = \sqrt{\frac{v^2}{V_{eq}^2} - 1} = \sqrt{\frac{v^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

Tutte le traiettorie stabili possibili, in uno spazio rotante caratterizzato dal valore K^2 , saranno dunque descritte dalle relazioni :

$$R = \frac{R_n}{1 + e \cdot \cos \theta} \quad ; \quad e = \sqrt{\frac{v^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

con : $n = 1 ; \sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{2} ; 2 ; 3 ; \dots n_s$

E' quindi possibile avere soluzioni reali, e quindi orbite stabili, solo per $v^2 \cdot R_n > K^2$ che equivale a $\alpha^2 > u^2$.

Per chiarire quanto è stato esposto può essere utile uno studio grafico.

Ricaviamo innanzitutto gli estremi del campo di esistenza delle orbite stabili su ciascuna falda dello spazio rotante.

Riprendendo la condizione :

$$\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right) \cdot R^2 + 2 \cdot K^2 \cdot R - C \geq 0$$

e risolvendo, si ricavano gli estremi :

$$R = \frac{K^2}{\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \cdot \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} \cdot \left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \right]$$

Dovendo essere, per la realtà fisica, necessariamente $R \geq 0$, le soluzioni accettabili risultano le seguenti :

$1 - \cos \left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right) > 0$ equivalente a $v^2 > \frac{2 \cdot K^2}{R}$ oppure, indicando

con V_f la velocità di fuga dall'orbita, $v > \sqrt{2} \cdot V_{eq} = V_f$ si ottiene :

$$R > \frac{K^2}{\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} \cdot \left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} - 1 \right]$$

In questo caso, si ha un solo punto di inversione della velocità radiale e ne risulta così una traiettoria aperta.

Se indichiamo con r_0 l'unico punto in cui la traiettoria risulta perpendicolare al raggio vettore (perielio), si avrà :

$$\dot{R} = 0 ; v = v_0 ; C = r_0 \cdot v_0 ; V_{eq}^2 = \frac{K^2}{r_0}$$

e quindi, sostituendo, si ha :

$$\frac{K^2}{\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} = \frac{r_0}{\left(e - 1 \right)}$$

dalla quale si ricava la relazione : $e = \left[\frac{v_0^2 \cdot r_0}{K^2} - 1 \right]$

e, in definitiva, con $e > 1$ risulta :

$$R > \frac{r_0}{\left(e - 1 \right)} \cdot \left(e - 1 \right) = r_0$$

L'espressione analitica della traiettoria è una iperbole espressa da :

$$R = \frac{R_n}{1 + e \cdot \cos \vartheta} \quad \text{con } e > 1$$

2 – Nel caso limite $(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2) = 0$ si ha $e = 1$ e la traiettoria risulta

una parabola espressa dalla relazione :
$$R = \frac{R_n}{1 + \cos \vartheta}$$

3 – Per $0 < (2 \cdot V_{eq}^2 - v^2) < \frac{K^4}{C^2}$ equivalente a : $V_{eq}^2 < v^2 < 2 \cdot V_{eq}^2$

oppure a : $V_{eq} < v < V_f$, si ottiene :

$$R = r_0 \cdot \frac{(1 \pm e)}{(1 - e)} \quad \text{con } e < 1 ; \quad r_0 = \text{perielio}$$

sarà quindi :

$$r_0 \leq R \leq r_0 \frac{(1 + e)}{(1 - e)}$$

e la curva che descrive l' orbita risulta l'ellisse espressa dalla relazione :

$$R = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e \cdot \cos \vartheta} \quad \text{con } e < 1$$

4 – Nel caso limite in cui si ha $v^2 = V_{eq}^2$
risulta :

$$R = r_0 = \text{costante} \quad \text{con } r_0 = \frac{C^2}{K^2} ; \quad e = 0.$$

In questo caso, la traiettoria, è diventata coincidente con la più piccola orbita circolare stabile che si può realizzare fisicamente nello spazio rotante considerato ed è associata all'unico punto reale, appartenente al campo di esistenza, in corrispondenza del quale diventano tangenti

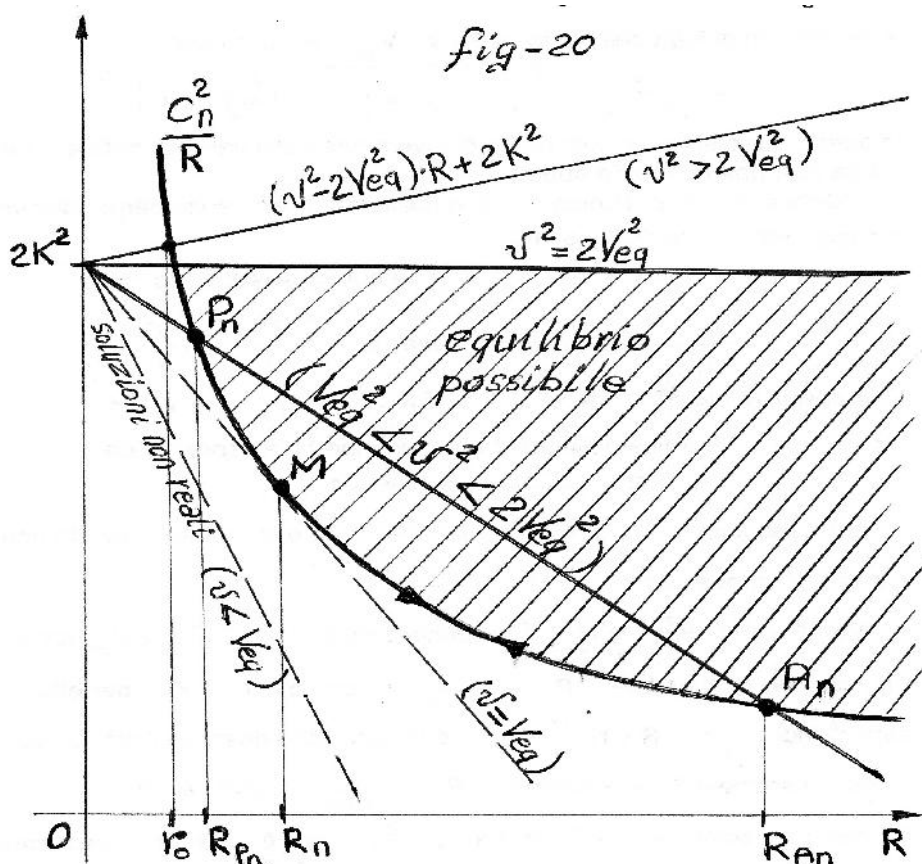
la curva
$$\gamma = \frac{C^2}{R}$$

con la retta
$$\gamma = (v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2) \cdot R + 2 \cdot K^2$$

5 - Per $v^2 < V_{eq}^2$ si ha $\alpha^2 < u^2$ e non risultano soluzioni reali.

Si ha, in questo caso, una traiettoria a spirale centripeta espressa dalla nota relazione $R \cdot \mathcal{G}^2 = \text{costante}$.

Tutte le situazioni che sono state descritte vengono chiarite nella figura 20 .



Se l'analisi non è limitata alla falda n – esima, ma si estende a tutto il raggio

d'azione dello spazio rotante K^2 , essendo $V_{eqn}^2 = \frac{K^2}{R_n}$, per qualsiasi

valore assegnato della velocità v^2 , esisterà sempre, nello spazio rotante che viene considerato, un valore n al quale è associato un valore del raggio R_n

tale che sia $v^2 \geq V_{eqn}^2$ (precisamente $R_n = \frac{K^2}{v^2}$) in modo da poter far

rientrare il problema nei casi già esaminati.

In definitiva, note le orbite circolari minime stabili possibili :

$$R_n = \frac{R_1}{n^2} = \frac{C_n^2}{K^2} = \frac{C_1^2}{n^2 \cdot K^2}$$

con $n = 1 ; \sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{2} ; 2 ; 3 ; 4 \dots \dots n_s$

una massa m qualsiasi (anche $m \rightarrow 0$), che entri nello spazio rotante preso in considerazione, andrà a collocarsi sulla prima orbita che incontra capace

di soddisfare la relazione $R_n \leq \frac{K^2}{v^2}$.

Essendo, generalmente, $R_n \neq \frac{K^2}{v^2}$, la traiettoria iniziale sarà una

ellisse con l'afelio situato nel punto in cui s'inserisce la massa m con

velocità iniziale $v^2 < V_{eqA} = \frac{K^2}{R_A}$.

In queste condizioni, la forza d'interazione tra la massa m e lo spazio rotante

è orientata verso il punto **P** (**perielio**) e dà origine ad un'accelerazione tale da soddisfare in ogni momento **la legge delle aree** .

Nel punto **P** si avrà $V^2 > V_{eqP}^2$ e la forza che agisce sulla massa **M** diventa centrifuga, per cui essa si allontana dal centro decelerando, sempre secondo la legge delle aree, fino al punto **A** (**afelio**), dove inizia un nuovo ciclo.

Questo meccanismo può essere messo in evidenza anche utilizzando il principio di conservazione dell'energia.

Si deve innanzitutto considerare che :

Una massa in perfetto equilibrio, su un' ORBITA CIRCOLARE, in uno spazio rotante non perturbato, avendo velocità orbitale perfettamente coincidente, in ogni momento, con quella di rotazione della falda di spazio in cui si muove, presenta velocità di scorrimento relativo nulla rispetto allo spazio fisico circostante e dunque tra essi NON SI PUO' realizzare alcuno scambio di energia.

Questa è la condizione che si realizza perfettamente negli atomi non eccitati e nei nuclei atomici i quali, per questa ragione, risultano assolutamente stabili nel tempo.

Se assumiamo questa come situazione di riferimento, è chiaro che l'energia effettivamente disponibile **per lo scambio sarà quella che eccede** il valore che la massa **M** possiede quando si trova in equilibrio sull'orbita circolare di raggio minimo.

In generale, abbiamo visto che l'energia totale, in ogni punto, è espressa da:

$$E(R) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

ma, per un'orbita circolare, è anche : $V^2 = \frac{K^2}{R}$

e quindi si ottiene :

$$E(R) = - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K^2}{R}$$

da cui si ricava :

$$\frac{dE}{dR} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K^2}{R^2}$$

Se ipotizziamo uno scambio di energia direttamente proporzionale al valore

della velocità di scorrimento relativo tra la massa in movimento e lo spazio fisico circostante, possiamo scrivere la variazione dell'energia della massa sulla traiettoria come azione di una forza frenante del tipo : $F = \alpha \cdot V$

sarà quindi :

$$dE = - F \cdot dl$$

oppure :

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{F \cdot dl}{dt} = - F \cdot V = - \alpha \cdot V^2 = - \alpha \cdot \frac{K^2}{R}$$

ma è anche :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}$$

dalla quale ricaviamo :

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dE}{dt} / \frac{dE}{dR} = - 2 \cdot \alpha \cdot R$$

Integrando, si ottiene il raggio dell'orbita :

$$R(t) = R_0 \cdot e^{-2 \cdot \alpha \cdot t}$$

Se la massa considerata non è in equilibrio su un'orbita circolare, si avrà :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R} \right)$$

ovvero :

$$\frac{dE}{dt} = m \cdot V \cdot \frac{d^2R}{dt^2} + m \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{dR}{dt}$$

e quindi, sostituendo, si ottiene :

$$m \cdot V \cdot \frac{d^2R}{dt^2} + m \cdot \frac{V^2}{R} \cdot \frac{dR}{dt} = -\alpha \cdot V^2$$

la quale, con $V = \omega \cdot R$ diventa :

$$\frac{1}{\omega} \cdot \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} + \frac{\alpha}{m} \cdot R = 0$$

Integrando tale relazione, come è noto, si ricava un andamento del raggio del tipo :

$$R(t) = R_0 \cdot \left[1 + a \cdot \text{sen}(\omega \cdot t) \right] \cdot e^{-b \cdot \alpha \cdot t}$$

in cui per le costanti a e b , **nelle orbite circolari, si assume $a = b = 0$.**

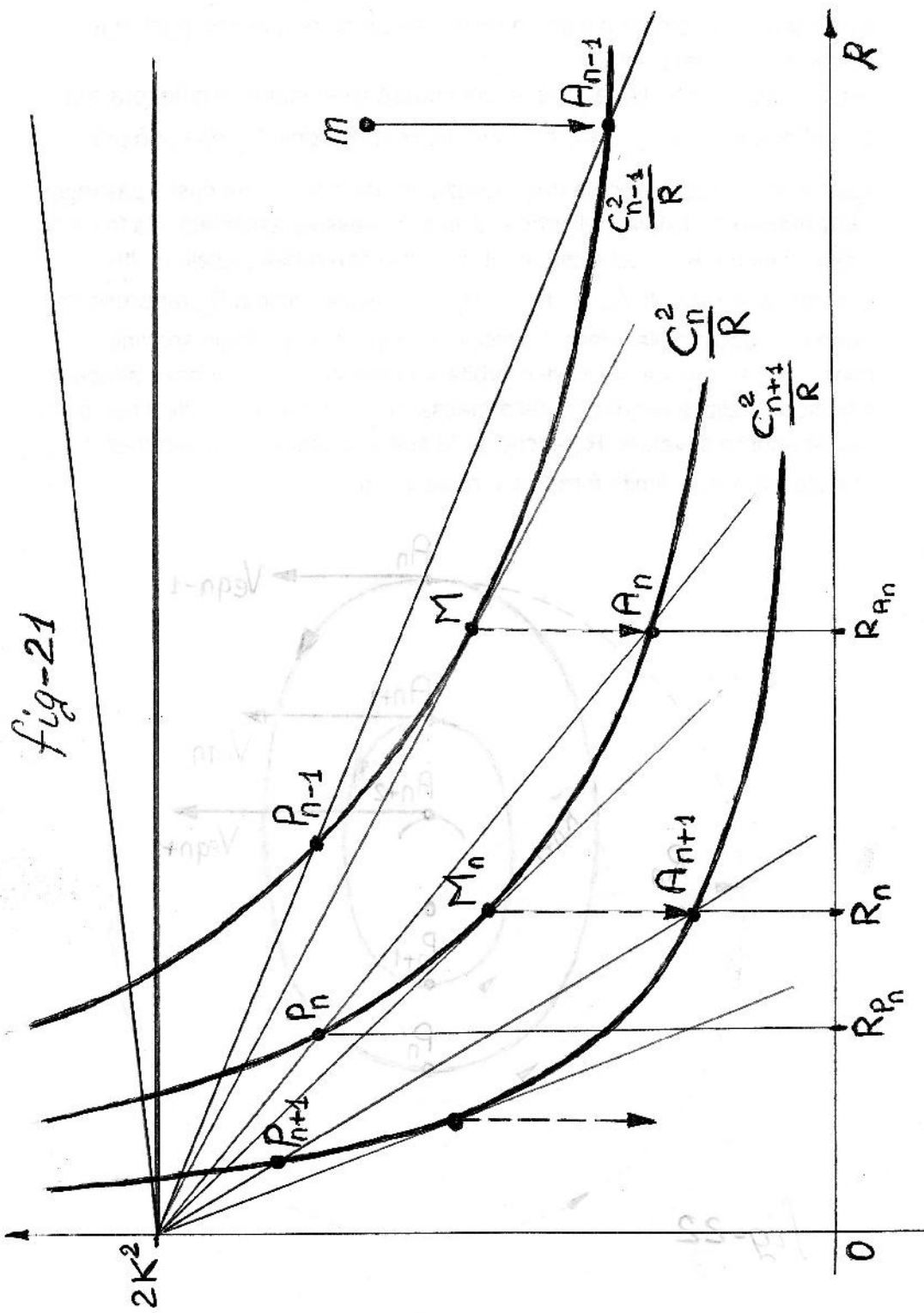
Secondo tale relazione, se non intervengono processi dissipativi o altri eventi eccezionali, la massa m continuerà a percorrere l'ellisse tra afelio e perielio per un tempo indefinito.

In realtà, sull'orbita ellittica si ha sempre tra massa e spazio un valore della velocità relativa diverso da zero e questo comporta uno scambio di energia con la conseguente graduale riduzione del raggio dell'orbita.

Solo negli atomi si realizzano orbite perfettamente circolari e dunque stabili con $a = b = 0$.

In queste condizioni le masse riescono a scambiare energia con lo spazio rotante circostante solo se vengono eccitate ed allontanate dalla condizione di equilibrio.

Secondo quanto è indicato nelle fig.20 e 21, quando la massa m entra nella falda di raggio R_n , inizialmente si ha un'orbita ellittica e molto eccentrica, la quale si riduce sempre più fino a diventare circolare quando viene raggiunto il raggio minimo nel punto M .

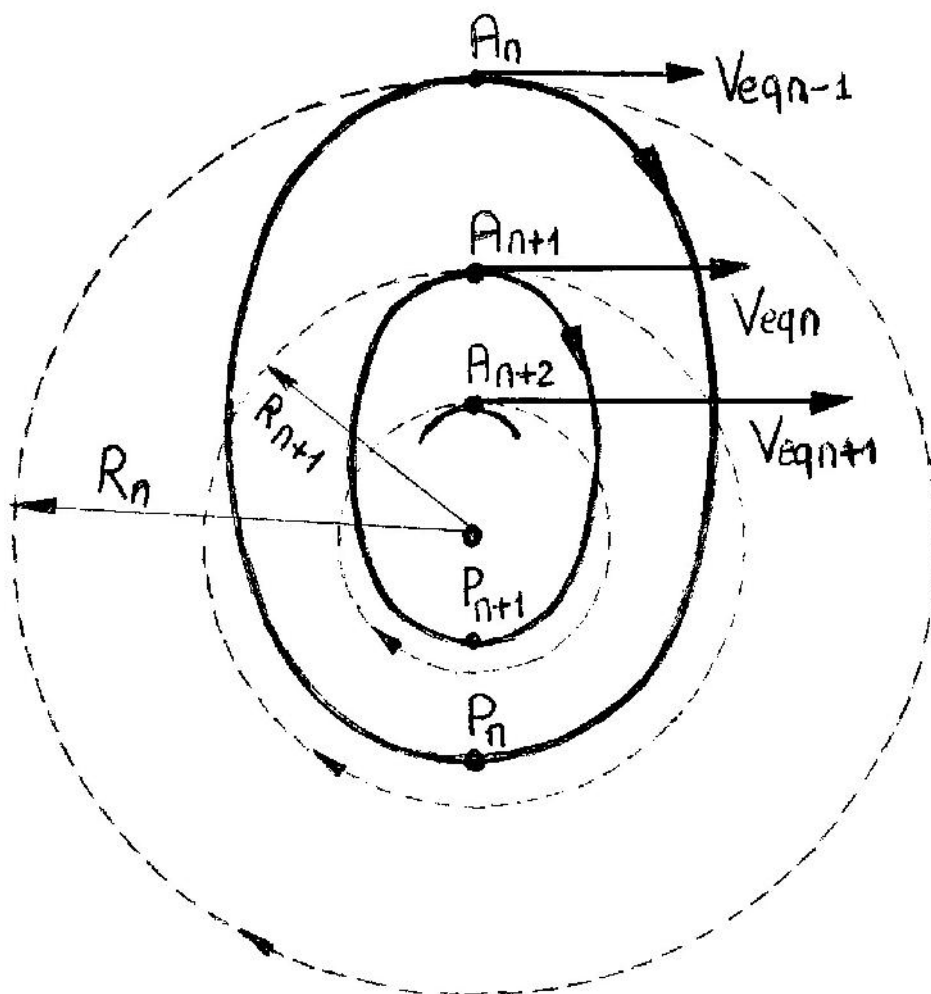


Se, dopo aver raggiunto il punto M, la velocità relativa V della massa in orbita

continuerà a diminuire, si giungerà alla condizione $v^2 < V_{\text{eqn}}^2 = \frac{K^2}{R_n}$

e l'orbita minima di raggio R_n non potrà più essere una soluzione reale della equazione del moto.

Questa situazione limite è rappresentata in figura 22 .



Si ha così il passaggio " istantaneo " all'afelio dell'orbita ellittica successiva associata alla falda di raggio minimo R_{n+1} ed inizia un nuovo ciclo con orbita iniziale molto eccentrica, tra i punti $A_{n+1} = R_{n+1}$ ed il perielio P_{n+1} .

Il valore minimo R_n rappresenta dunque il raggio della sfera di confine che separa due falde spaziali consecutive e l' eccentricità dell' orbita si presenta come il mezzo attraverso il quale si riesce a realizzare comunque l'equilibrio della massa m in moto su un'orbita il cui raggio oscilla attorno al valore R_n anche se la sua velocità non è esattamente V_{eqn} .