estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**
dalla meccanica celeste alla fisica nucleare

– Terza legge di Keplero, teoria e significato fisico della costante di Planck

La relazione $E_p = h_p \cdot \nu_p$ ci dice che all'energia E_p, che lega una sfera planetaria allo spazio rotante nel quale si muove, è associata una frequenza :

$$\nu_p = \frac{E_p}{h_p} = \frac{1}{h_p} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V_p^2 \right) = \frac{1}{h_p} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K_S^2}{R_p} \right)$$

Se in tale relazione si pone : $h_p = \alpha_u =$ **costante universale**

la frequenza ν_p diventa dipendente solo dal valore dell'energia E_p e non più dal sistema considerato.

Dunque, **tutte le masse legate dalla stessa energia avranno la stessa frequenza associata indipendentemente dal valore della massa e della velocità di rivoluzione**.

Ci si deve chiedere, a questo punto, quale significato fisico si potrà dare alla frequenza ν_p .
L'energia di legame di qualsiasi massa in orbita vale :

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_p^2 = \frac{m \cdot V_p}{2} \cdot V_p = \frac{m \cdot V_p}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_p}{T_p}$$

e quindi :

$$E_p = \left(2 \cdot \pi \cdot m \cdot V_p \cdot R_p \right) \cdot \frac{\nu_p}{2}$$

Secondo tale relazione, **verosimilmente**, **il valore dell'energia di legame è data dal prodotto di due fattori** dipendenti **entrambi dai valori delle caratteristiche orbitali del moto**.
Precisamente, **coincidono con il momento angolare e con la frequenza di rivoluzione**.

2125

Se la relazione si applica all'elettrone **nel suo stato fondamentale**, **si ottiene realmente il valore dell'energia di ionizzazione**.

Essendo questo l'unico caso sul quale riusciamo ad avere dati sperimentali, **non abbiamo alcun motivo per invalidare la relazione** in tutti gli altri casi, ritenendo il primo fattore " h " sempre uguale al valore associato all'elettrone, indipendentemente dalla massa considerata e dalle sue condizioni di moto.

Ci si deve inoltre chiedere quale significato può avere associare un'onda ad una energia e per quale fortunata coincidenza **solo nel caso dell'elettrone la sua frequenza coincide esattamente con quella di rivoluzione**, come prevede la teoria generale.

Per cercare di dare una risposta a queste domande, riprendiamo quanto è stato visto nella teoria generale degli spazi rotanti.
Consideriamo, inizialmente, una massa in equilibrio sull'orbita circolare con raggio R_{eq} alla velocità V_{eq} nello spazio rotante K_s^2 .
L'accelerazione che agisce sulla massa in queste condizioni vale :

$$a_{eq} = \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} - \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} = 0$$

Se si verifica uno spostamento dalla posizione di equilibrio, l'accelerazione

diventa : $$a = \frac{V^2}{R} - \frac{K_s^2}{R^2}$$

che si può anche scrivere :

$$a = a - a_{eq} = K_s^2 \cdot \left(\frac{1}{R_{eq}^2} - \frac{1}{R^2} \right) - \left(\frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} - \frac{V^2}{R} \right) =$$

$$= \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(1 - \frac{R_{eq}^2}{R^2} \right) - \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{R} \cdot \frac{R_{eq}}{V_{eq}^2} \right)$$

2126

ricordando che : $K_s^2 = V_{eq}^2 \cdot R_{eq}$

sostituendo si ottiene :

$$a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(\frac{V^2}{V_{eq}^2} \cdot \frac{R_{eq}}{R} - \frac{R_{eq}^2}{R^2} \right)$$

ponendo : $\frac{R}{R_{eq}} = r$; $\frac{V}{V_{eq}} = v$

si può scrivere : $a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(\frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right).$

Se lo spostamento dalla posizione di equilibrio avviene senza dover applicare un momento esterno, il momento angolare della massa in moto rotorivoluente si mantiene costante su tutta l'orbita e quindi è

verificata la relazione : $V \cdot R = V_{eq} \cdot R_{eq}$

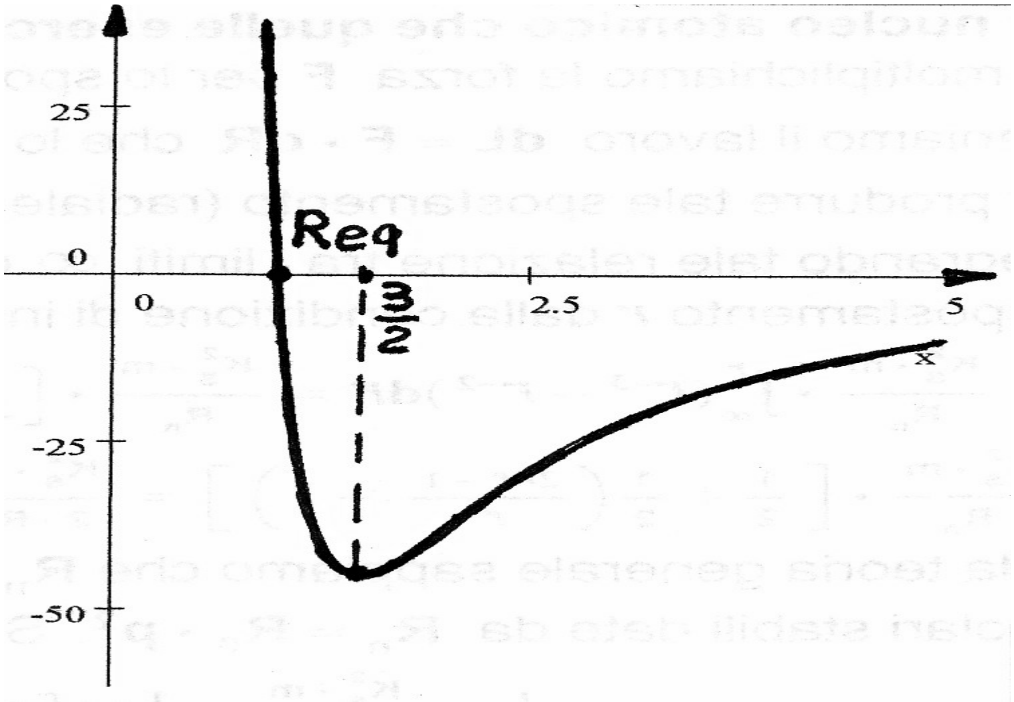
da cui si ricava : $\frac{V}{V_{eq}} = \frac{R_{eq}}{R}$ ossia : $v = \frac{1}{r}$

in definitiva, l'accelerazione che lo spazio rotante esercita sulla massa che si muove sull'orbita risulta espressa dalla relazione :

$$a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(r^{-3} - r^{-2}\right) \quad \text{oppure :} \quad a = \frac{K_s^2}{R^3} \cdot \left(R_{eq} - R\right)$$

Riportando su diagramma cartesiano, si ottiene l'andamento riportato nella figura alla pagina seguente.

2127



Se nell'espressione dell'accelerazione si sostituisce a R_n il valore del raggio esterno di una molecola, il diagramma coincide esattamente con quello che descrive le forze interatomiche agenti sulla massa unitaria di cui non è data l'espressione teorica, ma che in realtà, come si dimostra con questo calcolo, possono essere descritte come particolare applicazione della teoria degli spazi rotanti, avente validità **assolutamente generale** ed applicabile in tutto l'intervallo

$$0 < \left(R\ ;\ m\right) < \infty\ .$$

Derivando e annullando l'espressione di a, si ricava il valore $R = \frac{3}{2} \cdot R_n$

in corrispondenza del quale l'accelerazione centripeta risulta massima.

Sostituendo $R_n = \frac{R_1}{n^2}$, **con** $n = \mathbf{1}\ ;\ \mathbf{2}\ ;\ \mathbf{3} \cdots$

si ricava l'accelerazione a_n in prossimità delle orbite stabili in tutto il raggio d'azione dello spazio rotante .

2128

Come risulta chiaramente dal diagramma, " **per qualsiasi valore di** R " , in prossimità di $\mathsf{R_n}$, l'accelerazione a è sempre tale da riportare la massa orbitante in equilibrio nella condizione $\mathsf{R = R_{eq} = R_n}$ con $\mathsf{a} = \mathbf{0}$.

Se moltiplichiamo per la massa planetaria m , otteniamo il valore della forza che lo spazio rotante $\mathsf{K_s^2}$ esercita su di essa . Si ha dunque :

$$\mathsf{F} = \frac{\mathsf{K_s^2 \cdot m}}{\mathsf{R_n^2}} \cdot (r^{-3} - r^{-2})$$

La relazione si applica, **naturalmente**, **a tutti gli spazi rotanti e quindi la figura rappresenta l'andamento della** "forza che agisce sull'unità di massa" **quando essa si muove in prossimità dell'orbita circolare stabile di qualsiasi sistema**.

"**Lo stesso diagramma**" rappresenta sia le forze che si manifestano nel nucleo atomico che quelle esercitate dal Sole sui suoi pianeti.

Se moltiplichiamo la forza F per lo spostamento elementare :

$$\mathsf{dR = R_n \cdot d}r$$

otteniamo il lavoro $\mathsf{dL = F \cdot dR}$ che lo spazio rotante $\mathsf{K_s^2}$ deve compiere per produrre tale spostamento (radiale).

Integrando la relazione tra i limiti ∞ ed r , si ricava il **lavoro compiuto per ottenere lo spostamento** r , partendo dalla condizione di indipendenza che si verifica per $r = \infty$. Si ottiene così :

$$\mathsf{L} = \frac{\mathsf{K_s^2 \cdot m}}{\mathsf{R_n}} \cdot \int_\infty^r (r^{-3} - r^{-2})\mathbf{d}r =$$

$$= \frac{\mathsf{K_s^2 \cdot m}}{\mathsf{R_n}} \cdot \left[\int_\infty^1 (r^{-3} - r^{-2})\mathbf{d}r + \int_1^r (r^{-3} - r^{-2})\mathbf{d}r\right] =$$

2129

$$= \frac{K_s^2 \cdot m}{R_n} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot r - 1}{r^2} - 1 \right) \right] =$$

$$= \frac{K_s^2 \cdot m}{2 \cdot R_n} \left[1 - \left(\frac{r^2 - 2 \cdot r + 1}{r^2} \right) \right]$$

Dalla teoria generale sappiamo che R_n **rappresenta il raggio delle orbite circolari stabili** date da $R_n = R_0 \cdot p^2$. Sostituendo, si ha quindi :

$$L = \frac{K_s^2 \cdot m}{2 \cdot R_0} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \left[1 - (r^{-1} - 1)^2 \right]$$

Se consideriamo lo spazio rotante centrale K_s^2 generato da Z unità uguali tra loro, dalla teoria generale sappiamo che :

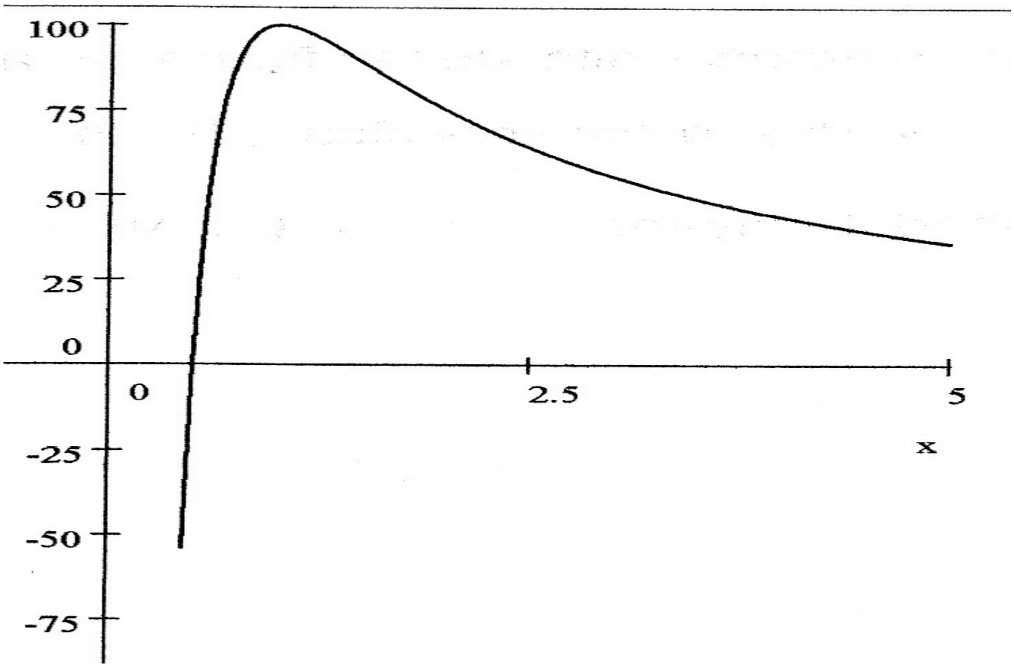
$$K_s^2 = K_{11}^2 \cdot Z \quad ; \quad R_0 = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

Sostituendo, si può dunque scrivere in generale :

$$L = \frac{K_{11}^2 \cdot m}{2 \cdot R_{11}} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \left[1 - (r^{-1} - 1)^2 \right]$$

In tutti i casi l'eccesso di energia **della massa in orbita**, **in funzione della distanza dalla condizione di equilibrio**, **ha l'andamento indicato nella figura riportata nella pagina seguente**.

2130



A titolo di esempio, per il sistema Sole–Terra, per il deuterio ponendo $Z = \mathbf{1}$, per l'elettrone periferico e per il protone nucleare, considerati entrambi nello stato fondamentale, si ricavano i valori :

$$L_{11e} = \frac{K_p^2 \cdot m_e}{\mathbf{2} \cdot R_{11e}} = \mathbf{13,60569806}\ \text{eV}$$

$$L_{11p} = \frac{\frac{K_P^2}{2} \cdot m_p^*}{\mathbf{2} \cdot R_{11p}} = \mathbf{8,60081722}\ \text{MeV}$$

$$L_T = \frac{K_S^2 \cdot m_T}{\mathbf{2} \cdot R_T} = \mathbf{2,65095 \cdot 10^{33}}\ \text{j} = \mathbf{1,654593 \cdot 10^{46}}\ \text{MeV}\ .$$

– elettrone in orbita :

$$E_e = -\,L_e = \mathbf{13,60569806}\ \text{eV} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{p^2} \cdot \left[\ (r^{-1} - \mathbf{1})^2 - \mathbf{1}\right]$$

2131

protoni nucleari :

$$E_p = -L_p = 8{,}60081722 \text{ MeV} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \left[(r^{-1} - 1)^2 - 1 \right]$$

per la Terra :

$$E_T = -L_T = 1{,}654593 \cdot 10^{46} \text{ MeV} \cdot \left[(r^{-1} - 1)^2 - 1 \right]$$

Per meglio confrontare gli spazi rotanti tra loro, consideriamo **una massa di valore unitario** in orbita con velocità orbitale di valore prefissato.

Essendo la velocità della luce C_l **il valore massimo raggiungibile sulla prima orbita** R_{ns} **di qualsiasi spazio rotante**, **assumiamo** per tutta la materia, l'orbita di raggio minimo, come riferimento :

$$R_{ns} = \frac{K_S^2}{C_l^2}$$

Si ottiene così il lavoro che è necessario compiere per poter confinare la massa unitaria entro il minore spazio possibile, **dato dal valore del raggio medio** $r_{min} = \frac{1}{2} \cdot R_{ns}$. Si ha quindi :

$$L_{max} = \frac{K_S^2}{2 \cdot r_{min}} \cdot \left[1 - (r^{-1} - 1)^2 \right] = C_l^2 \cdot \left[1 - (r^{-1} - 1)^2 \right]$$

Per $r = 1$ si ottiene :

$$L_{max} = C_l^2 = \text{lavoro di sintesi della massa unitaria}$$

Se come orbita di riferimento assumiamo una qualsiasi altra di raggio R_0 e velocità orbitale V_0 sarà :

$$L_0 = \frac{K_S^2}{2 \cdot R_0} \cdot \frac{R_{ns}}{R_{ns}} = \frac{K_S^2}{2 \cdot R_{ns}} \cdot \frac{R_{ns}}{R_0} = \frac{K_S^2}{2 \cdot R_{ns}} \cdot \left(\frac{V_0}{V_{nS}} \right)^2$$

2132

posto : $$p^2 = \left(\frac{C_l}{V_0} \right)^2 = \left(\frac{R_0}{R_{nS}} \right)$$

in generale **il punto di massa unitaria** in moto sull'orbita avrà quindi l'energia:

$$E = -L = \frac{C_l^2}{2 \cdot p^2} \cdot (r^{-2} - 2 \cdot r^{-1}) = -\frac{V_{eq}^2}{2} \cdot \left[(r^{-1} - 1)^2 - 1 \right]$$

Tale relazione è di validità assolutamente generale e l'unico parametro che caratterizza lo spazio rotante considerato è il rapporto p.

L'eccesso di energia rispetto al livello di equilibrio sarà :

$$E^* = -\frac{V_{eq}^2}{2} \cdot (r^{-1} - 1)^2$$

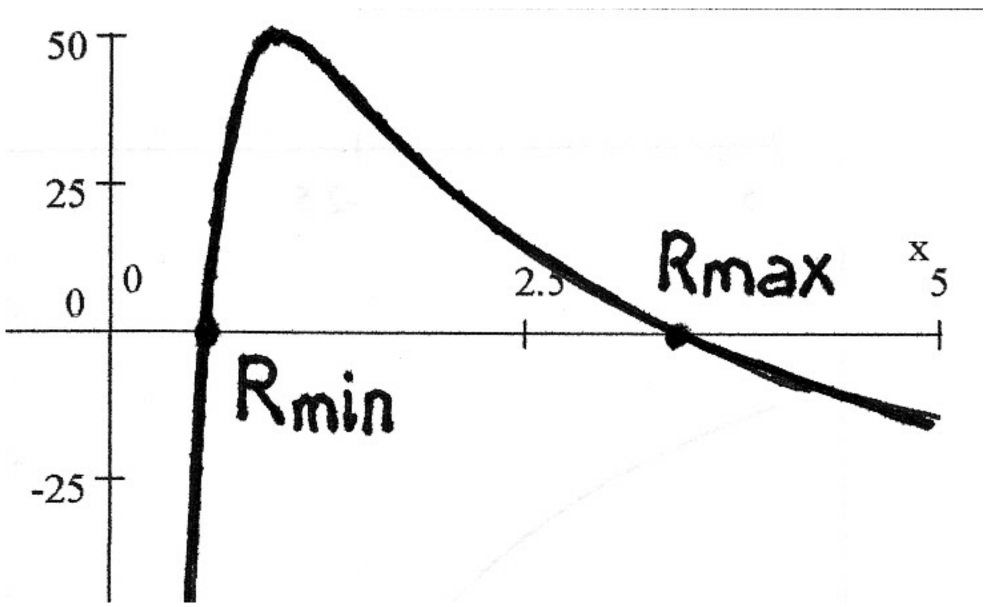
Ponendo $E^* = 0$, si ricavano i punti in cui si verifica l'inversione della velocità radiale in corrispondenza dei quali si hanno il perielio e l'afelio dell'orbita.

Si ricavano così i valori : $r = \frac{1}{2}$ e $r = \infty$

Si ha quindi : $$R_{min} = \frac{1}{2} \cdot R_{eq}$$

risultato coincidente con quello già ricavato, nei sistemi astronomici con la sfera planetaria in moto su un'orbita aperta.
Nella pagina seguente è riportato il diagramma cartesiano **dell'eccesso di energia in funzione del raggio dell'orbita**.

2133



Con riferimento alla stessa figura, se "alla massa in equilibrio" viene fornito come eccesso di energia (rispetto al valore di equilibrio) la frazione di energia specifica α (il riferimento è sempre all'unità di massa), si ha :

$$\Delta E = \alpha \cdot \frac{V_{eq}^2}{2}$$

l'energia complessivamente posseduta diventa :

$$E = E^* + \Delta E = \frac{V_{eq}^2}{2} \cdot \left[-(r^{-1} - 1)^2 + \alpha \right]$$

ponendo $E = 0$, si ricavano, in questo caso, i punti :

$$R_{min} = \frac{R_{eq}}{1 + \sqrt{\alpha}} \quad ; \quad R_{max} = \frac{R_{eq}}{1 - \sqrt{\alpha}}$$

Per valori di α negativi non si hanno soluzioni reali, **ossia**, **se alla**

2134

massa si sottrae energia, "**anche una quantità infinitesima**", **essa non ha più alcuna possibilità di restare in equilibrio sull'orbita**.

Anche questo risultato **è perfettamente coerente** con quanto abbiamo visto trattando la teoria generale.
Abbiamo infatti già ricavato che il primo punto in corrispondenza del quale è possibile avere un nuovo equilibrio è quello **associato al numero quantico** $(p-1)$ con valori del momento angolare e dell'energia potenziale minori di quelli del livello di partenza .

Il nuovo equilibrio si potrà dunque realizzare solo con un "improvviso" adattamento di questi valori, senza avere alcuna possibilità di passare attraverso posizioni stabili intermedie.

Per valori di α positivi l'energia assume l'andamento indicato in figura.
Si hanno, in questo caso, due punti di equilibrio che vengono indicati come

perielio : $R_{min} = \dfrac{R_n}{1+e}$; **afelio** : $R_{max} = \dfrac{R_n}{1-e}$

dove $e = \sqrt{\alpha}$ indica l'eccentricità dell'orbita

e la massa planetaria oscilla continuamente tra questi due punti percorrendo una traiettoria che possiamo ricavare integrando l'equazione del moto.
Incidentalmente, ricordiamo che **per l'orbita ellittica**, indicando con a e b i due semiassi maggiore e minore, si hanno le relazioni :

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad ; \quad a = \frac{R_{min} + R_{max}}{2} = \frac{R_n}{\left(1-e^2\right)}$$

Consideriamo il caso generale in cui lo scambio di energia si realizza in uno spazio fisico non puro, in cui la velocità relativa tra spazio e sfera planetaria in movimento, dà origine ad uno scambio continuo di energia.

Lo scambio di energia può essere descritto attraverso l'accelerazione che

2135

agisce sulla massa unitaria, che si può esprimere con una relazione del tipo :

$$a_s = -\beta \cdot (V - V_n).$$

Se indichiamo con $X = (R - R_n)$ la distanza dall'orbita circolare stabile, si ottengono le accelerazioni :

$$a = -\frac{K_s^2}{R^3} \cdot X \quad ; \quad a_s = -\beta \cdot \frac{dX}{dt}$$

ricordiamo che l'espressione di a è stata ricavata con la condizione che **durante il moto si abbia** : $V \cdot R =$ **costante** .

L'equazione del moto diventa dunque :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{K_s^2}{R^3} \cdot X = 0$$

analoga a quella relativa ai circuiti elettrici oscillanti tipo RLC .
integrando si ricava l'equazione della traiettoria :

$$X = X_{max} \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

ricordando ora la relazione :

$$X_{max} = R - R_{max} = R \cdot \left(1 - \frac{R_{max}}{R} \right) =$$

$$= R \cdot \left(1 - \frac{R_n}{1 - e} \cdot \frac{1 - e^2}{R_n} \right) = - R \cdot e$$

2136

sostituendo si ha quindi l'equazione dell'orbita :

$$R = \frac{R_n}{1 + e \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

con : $$e = \frac{R_{max} - R_{min}}{R_{max} + R_{min}} = \sqrt{\alpha} \quad ; \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{K_S^2}{R^3} - \frac{\beta^2}{4}}$$

sulla quale si verifica la conservazione del momento angolare specifico, che viene espresso dalla relazione (da cui deriva la legge delle aree) :

$$V \cdot R = \text{costante}$$

Si tratta di un'orbita ellittica con una eccentricità che si riduce ad ogni periodo di un fattore costante, **secondo la relazione** :

$$e_{(n+1)T} = e_{(n)T} \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot T} \quad \text{equivalente a :} \quad \frac{e_{(n)T}}{e_{(n+1)T}} = \frac{\beta}{2} \cdot T$$

Il coefficiente β **vale zero** negli spazi rotanti puri come, per esempio, **quelli atomici e nucleari** nei quali non sono presenti aggregati materiali vaganti, mentre assume valori molto piccoli, e dunque si trascura, nello **spazio vuoto ordinario**, dove sono comunque presenti aggregati subatomici e subfotonici in grandi quantità.

Valori elevati del coefficiente β si hanno solo in presenza di atmosfere con aggregati molecolari.

In questo caso il raggio dell'orbita **presenta un valore critico** oltre il quale il moto di rivoluzione cessa e la massa planetaria si muove direttamente verso il centro dello spazio rotante.

Ponendo $\omega = 0$, il valore critico risulta :

2137

$$R_c = \left(\frac{2}{\beta} \cdot K_s \right)^{\frac{2}{3}}$$

Nei casi in cui si può assumere $\beta = 0$, il periodo orbitale diventa :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{K_s^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^{\frac{3}{2}}}{K_s}$$

Tale relazione coincide con la terza legge sperimentale di Keplero.

Sostituendo il valore medio del raggio (semiasse maggiore) :

$$R = \frac{R_n}{\left(1 - e^2\right)}$$

si ottiene il periodo orbitale :

$$T = \frac{T_n}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Se si sostituisce l'espressione del raggio : $R_n = R_{ns} \cdot p^2$

per le orbite circolari stabili si può ancora scrivere :

$$T_n = T_{ns} \cdot p^3$$

Nello spazio vuoto ordinario il fattore di smorzamento β assume un valore molto basso e le velocità non sono molto diverse dai valori che si hanno in condizioni di equilibrio, **per cui il raggio delle orbite risulta con una evoluzione molto lenta nel tempo**.

Nella struttura atomica si ha invece $\beta = 0$ e questo modifica radicalmente il comportamento delle masse orbitanti.

2138

Inoltre, in questo caso, la situazione si presenta particolarmente semplice in quanto lo spazio rotante atomico viene generato da Z particelle centrali tutte uguali tra loro ed in orbita abbiamo un uguale numero di particelle anch'esse uguali tra loro.

Questa situazione comporta una notevole semplificazione nei calcoli e anche comportamenti degli aggregati particolarmente interessanti.

Per esempio, nella teoria generale, per il raggio della prima orbita stabile dello spazio rotante atomico abbiamo ricavato la relazione :

$$R_{1e} = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

dove R_{11e} rappresenta il raggio dell'orbita fondamentale (prima orbita con $p = \mathbf{1}$) dell'atomo formato da $Z = \mathbf{1}$.
Per l'orbita generica, associata al numero quantico p , si ricava :

$$R_{ZPe} = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$$

essendo anche : $K^2_{ZPe} = K^2_p \cdot Z$

sostituendo si ottiene il periodo orbitale T_{ZPe} dell'elettrone in moto su qualsiasi orbita di qualsiasi atomo :

$$T_{ZPe} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{ZPe}^{\frac{3}{2}}}{K_{ZPe}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{11e}^{\frac{3}{2}} \cdot Z^{\frac{1}{2}} \cdot p^3}{K_p \cdot Z^{\frac{1}{2}}}$$

semplificando si ricava : $T_{ZPe} = T_{11e} \cdot p^3$

Questa relazione è di estrema importanza per lo studio

2139

degli atomi e del nucleo,in quanto ci dice che il periodo di rivoluzione T_{ZP} delle particelle in orbita non dipende dallo spazio fisico considerato, ma solo dal livello dell'orbita p.

Questo vuol dire, per esempio, che tutti gli elettroni che si muovono sulla terza orbita, qualunque sia l'atomo considerato, si muovono con un periodo pari a :

$$T_{3e} = T_{11e} \cdot 3^3 = 1.51982985 \cdot 10^{-19}\text{sec} \cdot 27 = 4.103540595 \cdot 10^{-18}\text{sec}$$

Con $p = p_s$ si ottiene il periodo associato all'orbita periferica dell'atomo.

2140