

estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**
dalla meccanica celeste alla fisica nucleare
– **Espressione teorica delle forze di Van der Waals e dei raggi atomici**

Consideriamo la massa unitaria in **equilibrio** su un'orbita circolare di raggio R_{eq} , che si muove con la velocità V_{eq} in uno spazio rotante di valore K_s^2 .
L'accelerazione che agisce sulla massa in queste condizioni vale :

$$a_{eq} = \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} - \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} = 0$$

Se si verifica uno spostamento dalla posizione di equilibrio, l'accelerazione radiale diventa :

$$a = \frac{V^2}{R} - \frac{K_s^2}{R^2}$$

che si può anche scrivere :

$$a = a - a_{eq} = K_s^2 \cdot \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_{eq}^2} \right) - \left(\frac{V^2}{R} - \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} \right) =$$

$$= \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(1 - \frac{R_{eq}^2}{R^2} \right) - \frac{V_{eq}^2}{R_{eq}} \cdot \left(1 - \frac{V^2}{R} \cdot \frac{R_{eq}}{V_{eq}^2} \right)$$

ricordando la legge fondamentale degli spazi rotanti : $K_s^2 = V_{eq}^2 \cdot R_{eq}$
sostituendo si ottiene :

$$a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(\frac{V^2}{V_{eq}^2} \cdot \frac{R_{eq}}{R} - \frac{R_{eq}^2}{R^2} \right)$$

ponendo :

$$\frac{R}{R_{eq}} = r \quad ; \quad \frac{V}{V_{eq}} = v$$

si può scrivere :

$$a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \left(\frac{v^2}{r} - \frac{1}{r^2} \right).$$

Se lo spostamento dalla posizione di equilibrio avviene senza dover applicare un momento esterno, il momento angolare della massa in moto rotorivolvente si mantiene costante su tutta l'orbita e quindi è verificata la relazione :

$$V \cdot R = V_{eq} \cdot R_{eq}$$

da cui si ricava :

$$\frac{V}{V_{eq}} = \frac{R_{eq}}{R} \quad \text{ossia :} \quad v = \frac{1}{r}$$

in definitiva, l'accelerazione che lo spazio rotante esercita sulla massa che si muove sull'orbita risulta espressa dalla relazione :

$$a = \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot (r^{-3} - r^{-2}) \quad \text{oppure :} \quad a = \frac{K_s^2}{R^3} \cdot (R_{eq} - R)$$

che, per piccoli spostamenti, si può anche scrivere :

$$a \simeq - \frac{K_s^2}{R_{eq}^3} \cdot \Delta R = - \frac{K_s^2}{R_{eq}^2} \cdot \frac{\Delta R}{R_{eq}}$$

Per esempio, per produrre una riduzione del raggio $\frac{\Delta R}{R_{eq}} = 10^{-6}$ nell'atomo

di idrogeno, è necessario applicare all'elettrone una forza uguale a :

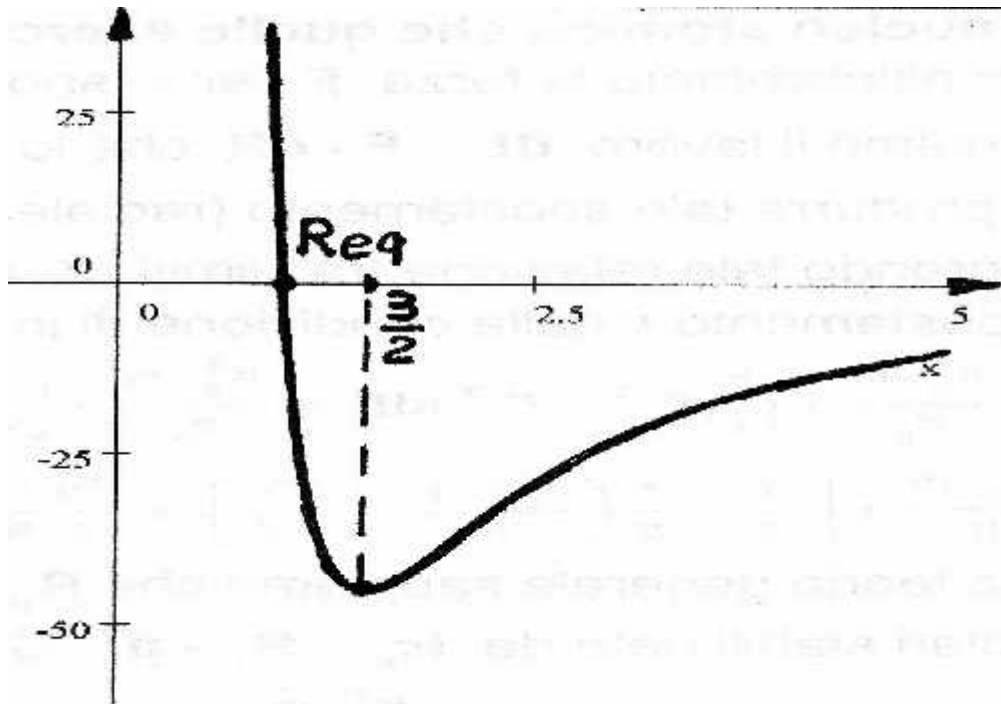
$$F = a \cdot m_e = 10^{-6} \cdot \frac{K_p^2}{R_{11e}^2} \cdot m_e = 8.23873 \cdot 10^{-14} \text{ Nw}$$

La pressione che si deve esercitare sulla sfera planetaria dell'elettrone dovrà essere :

2126b

$$P = \frac{F}{\pi \cdot R_{P0e}^2} = 3.1574 \cdot 10^{13} \frac{N_w}{m^2} \simeq 315.74 \cdot 10^6 \text{atm}$$

Riportando su diagramma cartesiano, si ottiene l'andamento riportato nella figura seguente, che mette in evidenza " **una grande stabilità dell' orbita** " per piccoli spostamenti della massa satellite.



Dal diagramma risulta infatti che una qualsiasi variazione del raggio genera sempre un'accelerazione tale da riportarlo al valore di equilibrio R_{eq} .

Se nell'espressione dell'accelerazione si sostituisce a R_{eq} il valore del raggio esterno di un atomo, **il diagramma coincide esattamente con quello che si rileva sperimentalmente per le forze di Van der Waals di cui non si conosce l'espressione teorica.**

Il calcolo dimostra però che esse possono essere descritte come particolare applicazione della teoria degli spazi rotanti, che ha validità **assolutamente generale** ed è applicabile in tutto l'intervallo $0 < (R ; m) < \infty$.

Derivando e annullando l'espressione di a , si ricava il valore $R = \frac{3}{2} \cdot R_n$

in corrispondenza del quale l'accelerazione centripeta risulta massima.

Sostituendo : $R_n = \frac{R_1}{n^2}$ oppure $R_p = \frac{R_1}{p^2}$

si ricava l'accelerazione a_n in prossimità delle orbite stabili in tutto il raggio d'azione dello spazio rotante .

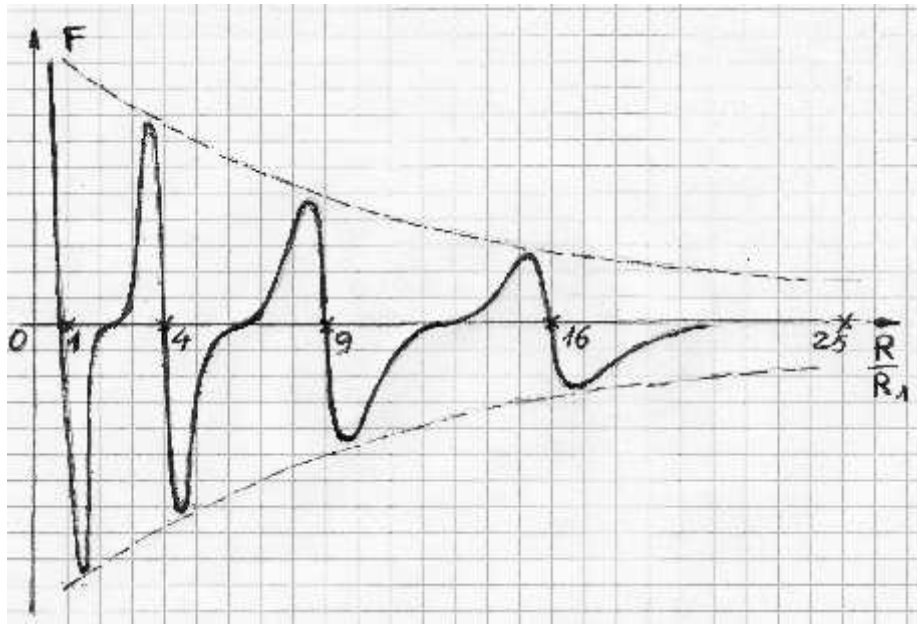
Se la massa si trova tra due livelli stabili vicini p e $(p + 1)$, ossia se si ha $R_p \leq R \leq R_{p+1}$, l'accelerazione che sollecita la massa verso la condizione di equilibrio sarà data dalla somma delle accelerazioni :

$$a = a_p + a_{p+1} = \frac{K_s^2 \cdot R_1}{R^3} \cdot \left(p^2 + (p+1)^2 - 2 \cdot \frac{R}{R_1} \right)$$

e cambia segno quando si verifica $p^2 + (p+1)^2 - 2 \cdot \frac{R}{R_1} = 0$ con la

massa equidistante dai due punti di equilibrio.

Moltiplicando l'accelerazione per la massa planetaria considerata, si ottiene l'espressione della forza, con l'andamento indicato in figura.



2126d

Si ha dunque :

$$F = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot (r^{-3} - r^{-2})$$

Questa relazione esprime dunque la forza che spinge la massa **m** verso una condizione di equilibrio **stabile** e si annulla in corrispondenza dei punti in cui

essa viene raggiunta, ossia $\frac{R}{R_1} = p^2 = 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; \text{ecc.....}$

La forza si annulla anche nei punti di flesso intermedi. Si tratta però di punti di equilibrio **instabile**, per cui risultano tutte zone vuote.

Dato che l'espressione indica anche la forza che richiama la massa **m** nella condizione di equilibrio quando essa ne viene allontanata, possiamo anche dire che **indica la forza di un legame**.

Può quindi essere conveniente esprimere la forza **F** in funzione dell'energia che lega la massa allo spazio rotante centrale, ricordando che essa è uguale a metà dell'energia potenziale, ossia :

$$E_{pm} = \frac{1}{2} \cdot F_s \cdot R_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot R_p$$

Sostituendo, abbiamo :

$$F = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot (r^{-3} - r^{-2}) = \frac{2 \cdot E_{pm}}{R} \cdot (r^{-2} - r^{-1})$$

Avendo ricavato la relazione senza alcuna ipotesi restrittiva, essa sarà applicabile a tutti gli spazi rotanti, indipendentemente dalle dimensioni.

" Lo stesso diagramma " rappresenta quindi sia le forze che si manifestano nell'atomo oppure nel nucleo atomico che quelle imposte dallo spazio rotante solare sui pianeti che si muovono in equilibrio sulle sue orbite stabili.

Se consideriamo lo spazio rotante atomico agente su un elettrone già legato

sul livello di confine di un altro atomo, è chiaro che, essendo l'elettrone legato con il nucleo, l'azione che si esercita su di esso si trasferisce integralmente a tutto l'atomo.

In questo caso l'espressione teorica che abbiamo ricavato descrive la forza d'interazione tra i due atomi al variare della loro distanza, nota come **forza di Van der Waals**, di cui le teorie correnti non forniscono alcuna espressione teorica, ma conoscono il suo comportamento attraverso i rilievi sperimentali, che portano praticamente a **risultati coincidenti** con quelli che si ottengono teoricamente.

Sostituendo, nell'espressione della forza le relazioni note :

$$m = m_e ; K_s^2 = Z \cdot K_p^2 ; R_p = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p_s^2$$

si ottiene :

$$F = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot (r^{-3} - r^{-2}) = \frac{Z \cdot K_p^2 \cdot m_e}{R_{11e}^2 \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot p_s^4} \cdot (r^{-3} - r^{-2})$$

posto :

$$F_{11e} = \frac{K_p^2 \cdot m_e}{R_{11e}^2} = 82.38729472 \cdot 10^{-9} N_w$$

si ottiene :

$$F = F_{11e} \cdot \frac{Z^{\frac{1}{3}}}{p_s^4} \cdot (r^{-3} - r^{-2})$$

Se consideriamo, per esempio, un atomo di zinco, con $Z = 30$ e $p_s = 4$ si ottiene :

$$F_{znc} = 9.9998625 \cdot 10^{-10} N_w \cdot (r^{-3} - r^{-2})$$

Per $r = \frac{R}{R_{eq}} < 1$ si ha $F_{znc} > 0$ e quindi l'azione è repulsiva

Per $r = 1$ e $r \rightarrow \infty$ si hanno le condizioni di equilibrio con $F_{znc} = 0$

Per $r > 1$ risulta $F_{znc} < 0$ e si ha quindi una forza attrattiva che raggiunge

il valore massimo in corrispondenza del valore $r = \frac{3}{2}$.

Nelle teorie correnti non sono disponibili equazioni ricavate teoricamente per descrivere le **forze interatomiche**, dunque ci si deve affidare a espressioni che vengono **ricavate empiricamente**.

La più nota di queste funzioni è il potenziale di **Lennard – Jones**, che si può scrivere nella forma :

$$V(r) = 4 \cdot \varepsilon \cdot \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\delta}{r} \right)^6 \right]$$

in cui ε rappresenta il valore della buca di potenziale, che viene associata all'atomo considerato e δ le sue dimensioni.

Da questa relazione si ricava l'espressione empirica della forza :

$$F(r) = \frac{4 \cdot \varepsilon}{r} \cdot \left[\left(\frac{\delta}{r} \right)^{12} - \left(\frac{\delta}{r} \right)^6 \right]$$

che, se poniamo :

$$\left(\frac{\delta}{r} \right)^6 = \frac{R_p}{R} = \frac{1}{r}$$

risulta formalmente coincidente con l'espressione teorica da noi ottenuta :

$$F(R) = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot (r^{-3} - r^{-2}) = \frac{2 \cdot E_{pm}}{R} \cdot (r^{-2} - r^{-1})$$

Con riferimento allo spazio rotante atomico, l'energia E_{pm} diventa :

$$E_{pm} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p^2} \cdot R_p = \frac{1}{2} \cdot \frac{Z \cdot K_p^2 \cdot m_e}{R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2}$$

2126g

semplificando e sostituendo i valori numerici, si ottiene :

$$E_{pm} = 13.60569806 \text{ eV} \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2}$$

L'espressione della forza diventa quindi :

$$F(R) = \frac{27.21139612 \text{ eV}}{R} \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2} \cdot (r^{-2} - r^{-1})$$

oppure, per piccoli spostamenti dalla posizione di equilibrio, si ha :

$$R \simeq R_p = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2 \text{ e quindi, sostituendo :}$$

$$F(R) \simeq \frac{F_{11e}}{p^4} \cdot (r^{-2} - r^{-1})$$

La relazione è stata ricavata considerando l'interazione di **una sola massa su una sola orbita** e quindi **si può applicare identicamente** solo in questi casi. Per esempio, la forza che lo spazio rotante solare esercita sulla Terra, quando essa si sposta dalla sua orbita di equilibrio risulta :

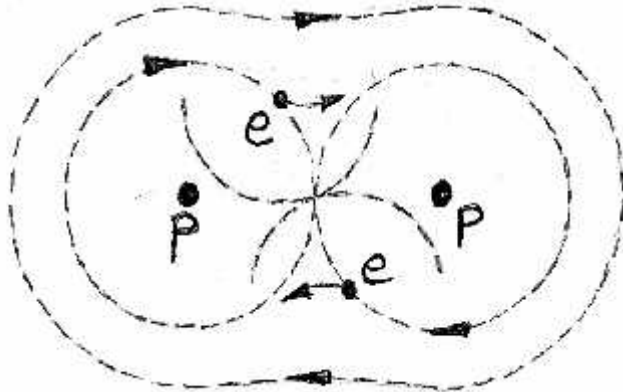
$$F_{Teq} = \frac{F_{11s}}{p_T^4} = \frac{K_s^2 \cdot m_T}{R_T^2} = 3.54404 \cdot 10^{22} N_w$$

$$\text{e quindi : } F_T(R) = 3.54404 \cdot 10^{22} N_w \cdot \left(\frac{R_T^2}{R^2} - \frac{R_T}{R} \right)$$

con l'andamento tipico delle forze di Van der Waals.

Ne caso in cui si considera l'interazione tra due spazi rotanti organizzati con molte masse distribuite su molti livelli stabili, come per esempio due galassie oppure due atomi o due nuclei, l'interazione si realizza come è schematizzato nella figura seguente.

fig-1



Quando i due masse periferiche arrivano nella zona centrale C, interagiscono attraverso la loro sfera planetaria di raggio R_{p0} con una accelerazione :

$$a = \frac{V_{mm}^2}{d_{mm}} - \frac{K_m^2}{d_{mm}^2} = \frac{V_{mm}^2}{d_{mm}} - \frac{V_{eqm}^2}{d_{mm}} = \frac{1}{d_{mm}} (V_{mm}^2 - V_{eqm}^2)$$

dove V_{eqm} rappresenta la velocità di equilibrio imposta dallo spazio rotante generato dalla massa m sull'orbita di raggio uguale alla distanza d_{mm} tra le due masse interagenti e V_{mm} la loro velocità relativa, che coincide con il doppio della **velocità di equilibrio** che le masse avevano sull'orbita iniziale dello spazio rotante centrale.

Dato che La massa che genera lo spazio rotante centrale è **sempre** di gran lunga maggiore di quella presente sulle orbite, risulta $V_{mm} \gg V_{eqm}$.

L'accelerazione risulta dunque repulsiva e le due masse si scambiano la loro posizione sulle orbite, come è indicato in figura.

In definitiva le due masse si trovano a percorrere un'orbita deformata attorno ai due nuclei, come se si trattasse di uno solo.

Naturalmente, **il processo si ripete per tutte le masse** presenti sul livello di confine.

Quando queste sono esaurite, l'interazione passa sul penultimo livello, poi sul terzultimo e così via fino al livello fondamentale, associato a $p = 1$.

Se indichiamo con m_A ed m_B le due masse solari, alla fine del processo si

avranno tutte le masse satelliti in orbita attorno ai due nuclei, che formano un **sistema doppio** alla distanza minima uguale alla somma dei raggi delle loro orbite fondamentali : $d_{AB} = R_{1A} + R_{1B}$.

Generalmente, quando il calcolo viene riferito all'atomo, si fa riferimento a due atomi dello stesso elemento e quindi si ottiene teoricamente :

$$d_{AB} = 2 \cdot R_1 = 2 \cdot R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

Il raggio della sfera planetaria associabile ad un singolo nucleo viene assunto come **raggio di Van der Waals** e risulta, in **prima approssimazione** :

$$R_{vdW} \simeq R_1 \simeq R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

La relazione è **molto approssimata**, in quanto non prende in alcun modo in considerazione la reale distribuzione degli elettroni sulle diverse orbite.

Nei rilievi sperimentali l'interazione tra gli atomi si realizza con una parziale sovrapposizione delle due sfere fondamentali di circa **(15 ÷ 25)%** in rapporto all'elemento considerato, dunque mediamente del **20%** .

Generalmente il valore del **raggio atomico** covalente ricavato per questa via risulta dunque :

$$R_{ac} \simeq 0.8 \cdot R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

I valori limiti, per l'intervallo che comprende gli elementi $Z = 1 \div 92$

risultano:

$$R_{ac(1)} = 42 \cdot 10^{-12}m \quad ; \quad R_{ac(92)} = 191 \cdot 10^{-12}m$$

Il valore massimo del raggio entro il quale è apprezzabile l'azione delle forze di Van der Waals, definito come raggio d'azione, vale, approssimativamente

$$R_{avdW} \simeq \frac{3}{2} \cdot R_{p_s} \simeq \frac{3}{2} \cdot R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p_s^2$$

Per esempio, per l'atomo di stagno, con $Z = 50$ e $p_s = 5$, risulta :

$$R_{avdW(50)} \simeq \frac{3}{2} \cdot 5 \cdot 29 \cdot 10^{-11}m \cdot 50^{\frac{1}{3}} \cdot 5^2 = 73.11 \cdot 10^{-10}m$$

Normalmente si considera la distanza fra i centri di due atomi interagenti, per cui si assume un valore doppio.