

estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**

dalla meccanica celeste alla fisica nucleare

– **Stabilità e evoluzione dei sistemi legati da forze centrali, dal sistema Solare al nucleo atomico.**

Con le forze di Van der Waals (Art. 24.1), abbiamo visto che, per spostare una massa qualsiasi dalla condizione di equilibrio, **in direzione radiale**, si deve applicare una forza data da :

$$F = m \cdot \frac{K_s^2}{R^3} \cdot (R_{eq} - R) = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_{eq}^2} \cdot (r^3 - r^2)$$

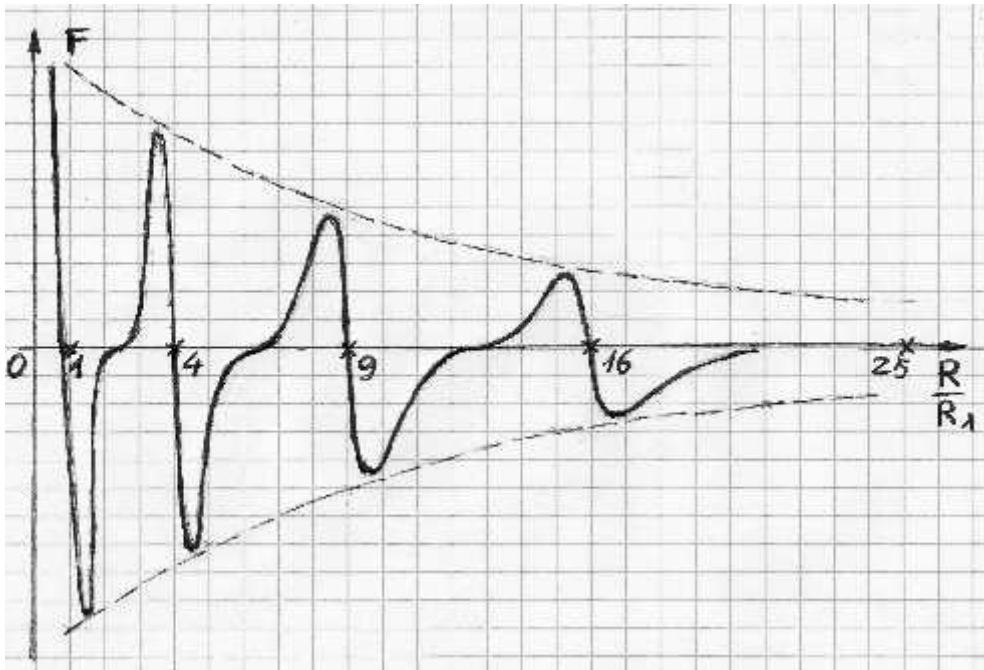
Ponendo: $F_{eq} = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_{eq}^2}$ e $\frac{R}{R_{eq}} = r$

si può scrivere :

$$F(R) = F_{eq} \cdot (r^3 - r^2)$$

e coincide chiaramente con il valore della forza che lo spazio rotante esercita sulla massa per riportarla in equilibrio.

Riportandola su un diagramma cartesiano, **per tutto il raggio d'azione** dello spazio rotante, si ottiene l'andamento indicato in figura.



2128a

Trattando la teoria generale degli spazi rotanti, abbiamo visto che il moto di un punto **nello spazio fisico** può verificare contemporaneamente i principi di conservazione dell'energia e del momento angolare solo sulle orbite circolari di raggio :

$$R_p = R_1 \cdot p^2 \quad \text{con } p = 1 ; 2 ; 3 \dots$$

La relazione si applica, naturalmente, a tutti gli spazi rotanti e quindi la figura rappresenta l'andamento della "forza che agisce sull'unità di massa" , quando essa si muove in prossimità dell'orbita circolare stabile, di qualsiasi sistema.

" Lo stesso diagramma " rappresenta sia le forze che si manifestano nel nucleo atomico che quelle esercitate dal Sole sui suoi pianeti.

Se moltiplichiamo la forza $F(R)$ per lo spostamento elementare :

$$dR = R_p \cdot dr$$

otteniamo il lavoro $dL = F(R) \cdot dR$ che lo spazio rotante centrale K_s^2 deve compiere per produrre tale spostamento (radiale).

Integrando la relazione tra i limiti ∞ ed r , si ricava il **lavoro compiuto per ottenere lo spostamento r** , partendo dalla condizione di indipendenza che si verifica per $r = \infty$. Si ottiene così :

$$\begin{aligned} L &= \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p} \cdot \int_{\infty}^r (r^{-3} - r^{-2}) dr = \\ &= \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p} \cdot \left[\int_{\infty}^1 (r^{-3} - r^{-2}) dr + \int_1^r (r^{-3} - r^{-2}) dr \right] = \\ &= \frac{K_s^2 \cdot m}{R_p} \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cdot r - 1}{r^2} - 1 \right) \right] = \end{aligned}$$

2128b

$$= \frac{K_s^2 \cdot m}{2 \cdot R_p} \left[1 - \left(\frac{r^2 - 2 \cdot r + 1}{r^2} \right) \right]$$

Sostituendo $R_p = R_1 \cdot p^2$, si ha quindi :

$$L = \frac{K_s^2 \cdot m}{2 \cdot R_1} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot [1 - (r^{-1} - 1)^2]$$

Se assumiamo uno spazio rotante elementare K_1^2 come riferimento, si potrà considerare lo spazio rotante centrale K_s^2 generato da Z unità uguali tra loro,

secondo la relazione :

$$Z = \frac{K_s^2}{K_1^2}$$

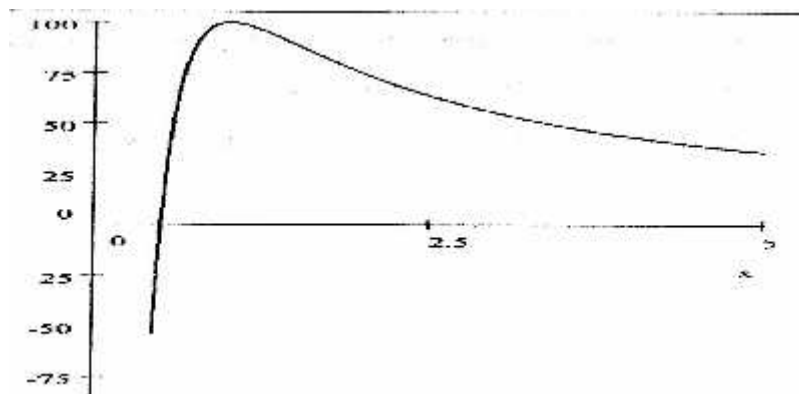
Dalla teoria generale sappiamo che, per qualsiasi spazio rotante, si ha :

$$K_s^2 = K_1^2 \cdot Z \quad ; \quad R_1 = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

Sostituendo, si può dunque scrivere in generale :

$$L(R) = \frac{K_1^2 \cdot m}{2 \cdot R_{11}} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot [1 - (r^{-1} - 1)^2]$$

Questo lavoro si manifesta come eccesso di energia, della massa in orbita, rispetto al valore richiesto per restare in equilibrio sull'orbita circolare e, in funzione della distanza dalla condizione di equilibrio, ha l'andamento indicato nella figura seguente.



2128c

Per meglio confrontare gli spazi rotanti tra loro, consideriamo **una massa di valore unitario** in orbita con velocità orbitale di valore prefissato.

Essendo la velocità della luce C_1 il valore massimo osservabile, con i nostri mezzi, in qualsiasi spazio rotante la prima orbita osservabile, e dunque raggiungibile, sarà quella di raggio minimo R_{ns} , sulla quale la velocità di equilibrio assume il valore massimo C_1 .

Assumiamo quindi l'orbita di raggio minimo, come riferimento per descrivere tutta la materia :

$$R_{ns} = \frac{K_s^2}{C_1^2}$$

Se il lavoro viene calcolato integrando da $R = \infty$ a $R = R_{ns}$, il valore che si ottiene rappresenta **il lavoro che lo spazio rotante deve compiere per portare la massa considerata dalla condizione di indipendenza dallo spazio rotante, associata a $R = \infty$, al confinamento nel minor spazio possibile, che coincide con l'orbita avente il raggio R_{ns} come confine.**

Si noti che questo lavoro risulta negativo e quindi in realtà "tutti i sistemi legati da forze centrali evolvono "spontaneamente" verso la condizione di massimo confinamento".

Si ha quindi :

$$L_{max} = \frac{K_s^2 \cdot m}{R_{ns}} \cdot [1 - (r^{-1} - 1)^2] = C_1^2 \cdot m \cdot [1 - (r^{-1} - 1)^2]$$

Per $r = 1$ si ottiene :

$$L_{max} = C_1^2 \cdot m = \text{lavoro di sintesi (confinamento entro } R_{ns} \text{) della massa } m$$

In generale **il punto di massa unitaria** in moto sull'orbita avrà quindi l'energia di legame uguale a metà dell'energia potenziale :

$$E = -\frac{L}{2} = -\frac{V_{eq}^2}{2} \cdot [(r^{-1} - 1)^2 - 1]$$

Ponendo $E = 0$, si ricavano i punti in cui si verifica l'inversione della velocità radiale in corrispondenza dei quali si hanno il perielio e l'afelio dell'orbita.

Si ricavano così i valori : $r = \frac{1}{2}$ e $r = \infty$

Si ha quindi : $R_{min} = \frac{1}{2} \cdot R_{eq}$

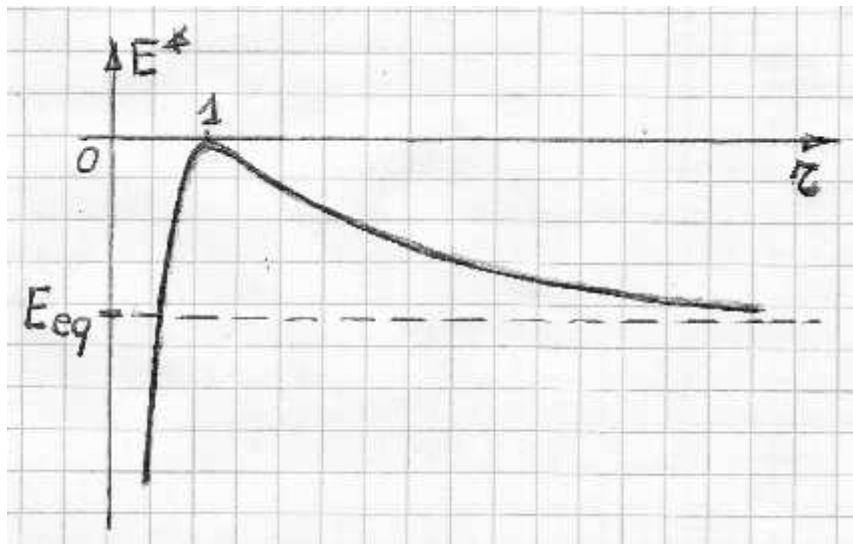
risultato coincidente con quello che abbiamo ricavato, nei sistemi astronomici **con la sfera planetaria in moto su un'orbita aperta** (si vedano le curve reali ricavate per i pianeti del sistema Solare qui riportate).

Essendo l'energia associata all'equilibrio $E_{eq} = \frac{V_{eq}^2}{2}$,

l'eccesso di energia rispetto al livello di equilibrio sarà :

$$E^* = -\frac{V_{eq}^2}{2} \cdot (r^{-1} - 1)^2$$

La curva dell'eccesso di energia E^* in funzione del raggio dell'orbita risulta quella indicata in figura.



2128e

Con riferimento alla stessa figura, se "alla massa in equilibrio" viene fornito come eccesso di energia (rispetto al valore di equilibrio) la frazione di energia specifica α (il riferimento è sempre all'unità di massa), si ha :

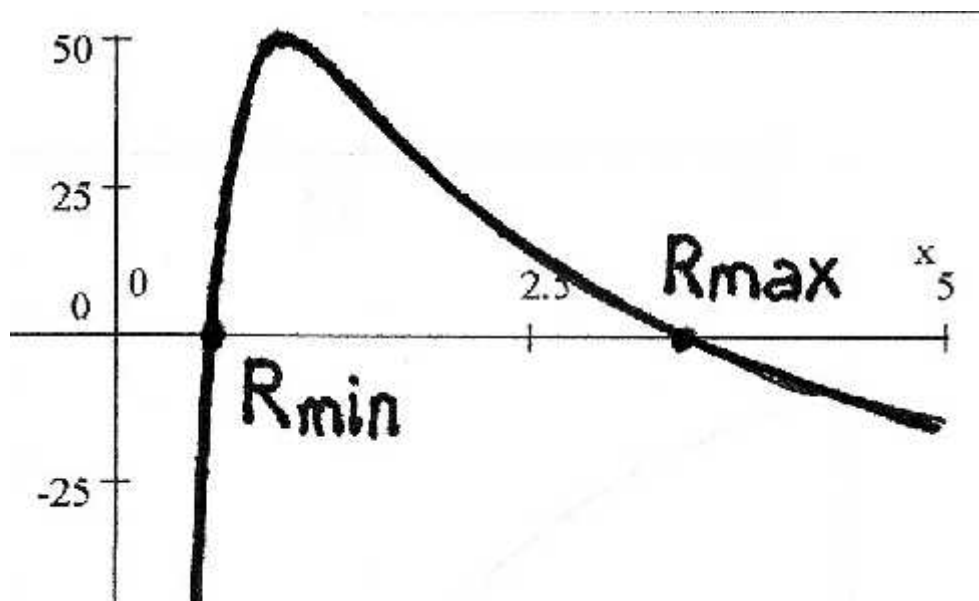
$$\Delta E = \alpha \cdot \frac{V_{eq}^2}{2}$$

l'energia complessivamente posseduta diventa :

$$E = E^* + \Delta E = \frac{V_{eq}^2}{2} \cdot [-(r^{-1} - 1)^2 + \alpha]$$

ponendo $E = 0$, si ricavano, in questo caso, i punti :

$$R_{min} = \frac{R_{eq}}{1 + \sqrt{\alpha}} \quad ; \quad R_{max} = \frac{R_{eq}}{1 - \sqrt{\alpha}}$$



Per valori di α negativi non si hanno soluzioni reali, ossia, se alla massa si sottrae energia, "anche una quantità infinitesima",

essa non ha più alcuna possibilità di restare in equilibrio sull'orbita.

Anche questo risultato è **perfettamente coerente** con quanto abbiamo visto trattando la teoria generale.

Abbiamo infatti già ricavato che il primo punto in corrispondenza del quale è possibile avere un nuovo equilibrio è quello **associato al numero quantico** $(p-1)$ con valori del momento angolare e dell'energia potenziale minori di quelli del livello di partenza .

Il nuovo equilibrio si potrà dunque realizzare solo con un "improvviso" adattamento di questi valori, senza avere alcuna possibilità di passare attraverso posizioni stabili intermedie.

Per valori di α positivi l'energia assume l'andamento indicato in figura. Si hanno, in questo caso, due punti di equilibrio che vengono indicati come

$$\text{perielio : } R_{\min} = \frac{R_n}{1+e} \quad ; \quad \text{afelio : } R_{\max} = \frac{R_n}{1-e}$$

dove $e = \sqrt{\alpha}$ indica l'eccentricità dell'orbita e la massa planetaria oscilla continuamente tra questi due punti.

Ricordiamo che **per l'orbita ellittica**, indicando con a e b i due semiassi maggiore e minore, si hanno le relazioni :

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \quad ; \quad a = \frac{R_{\min} + R_{\max}}{2} = \frac{R_n}{(1-e^2)}$$

Ricaviamo ora l'equazione della traiettoria integrando l'equazione del moto.

Consideriamo il caso generale in cui lo scambio di energia si realizza in uno spazio fisico non puro, in cui la velocità della massa planetaria in movimento è diversa da quella associata all'equilibrio della falda in cui si muove.

Trattando la teoria generale degli spazi rotanti, abbiamo visto che, quando le masse planetarie sono trascurabili rispetto a quella centrale, che genera lo spazio rotante, la geometria delle orbite risulta praticamente indipendente dal valore delle masse.

Abbiamo anche visto che i punti " dello spazio fisico " circostante un "aggregato materiale" raggiungono la condizione di equilibrio con un moto su orbite, circolari e discrete, caratterizzate dai valori :

$$R_n = \frac{R_1}{n^2} \quad ; \quad V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R_n}$$

Tra due orbite consecutive R_n ed R_{n+1} non è possibile trovare alcuna orbita circolare di equilibrio stabile.

Se dunque, sull'orbita dello spazio rotante avente raggio R_n , mettiamo una particella materiale avente velocità V^2 rispetto al centro dello spazio rotante, e risulta $V^2 = V_{eq}^2$, essa risulta in equilibrio e si mantiene ad una distanza dal centro $R_n = \text{costante}$.

Tutte queste circostanze possono essere verificare facilmente considerando il problema sotto l'aspetto energetico.

Il lavoro che lo spazio rotante compie per spostare la massa m da $R = \infty$ alla distanza R dal centro vale:

$$L = \int_{\infty}^R F(R) dR = \int_{\infty}^R - \frac{K^2}{R^2} m dR = m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se si considera il sistema conservativo, la massa m acquista una energia potenziale:

$$E_p = -L = -m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se indichiamo con E_c il valore dell'energia cinetica posseduta dalla massa in moto, la sua energia totale, nel caso più generale risulta :

$$E = E_c + E_p$$

e quindi :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

2128h

sostituendo l'espressione della velocità in coordinate polari, si ottiene :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\dot{R}^2 + (R \cdot \dot{\vartheta})^2 \right] - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

dalla quale si ricava :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \frac{2 \cdot K^2}{R} - (R \cdot \dot{\vartheta})^2$$

Se il momento delle forze esterne, rispetto al centro di rotazione, vale zero, deve essere verificata la conservazione del momento angolare e quindi si ha :

$$(R \cdot \dot{\vartheta})^2 = \frac{C^2}{R^2}$$

che, sostituita nella precedente relazione, fornisce :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 - \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2$$

Se viene verificato anche il principio di conservazione dell' energia, si ha anche $E = \text{costante}$ e quindi si può porre:

$$\frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 = \alpha^2 = \text{costante}$$

$$\left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2 = u^2$$

da cui, differenziando, si ottiene : $du = - \frac{C}{R^2} dR$

sostituendo, si ottiene l' equazione differenziale :

2128i

$$\dot{R}^2 = \alpha^2 - u^2$$

equivalente a:
$$\frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\alpha^2 - u^2}$$

Questa relazione ha un campo di esistenza, dunque si può

realizzare, fisicamente, solo per : $\alpha^2 \geq u^2$

e quindi per :

$$\frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 \geq \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2$$

ovvero :

$$\frac{2 \cdot E}{m} \cdot R^2 + 2 \cdot K^2 \cdot R - C^2 \geq 0$$

che si può anche scrivere :

$$\left[\frac{2 \cdot E}{m} \cdot R + 2 \cdot K^2 \right] \geq \frac{C^2}{R}$$

Ricordando che :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2} m V^2 - m \frac{K^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot m V^2 - m V_{eq}^2$$

si ha :
$$\frac{2 \cdot E}{m} = V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \quad \text{con} \quad V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R}$$

In definitiva quindi, per poter avere soluzioni reali, dovrà essere verificata la condizione fondamentale :

$$\left[V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right] \cdot R + 2 \cdot K^2 \geq \frac{C^2}{R}$$

Il valore della costante C si ricava considerando la relazione con la velocità areolare del punto sull'orbita :

$$V_a = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot R \cdot dl}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R \cdot R \cdot d\vartheta}{dt} = \frac{1}{2} \cdot (R^2 \cdot \dot{\vartheta}) = \frac{C}{2}$$

si ha dunque, in definitiva : $C = 2 \cdot V_a$

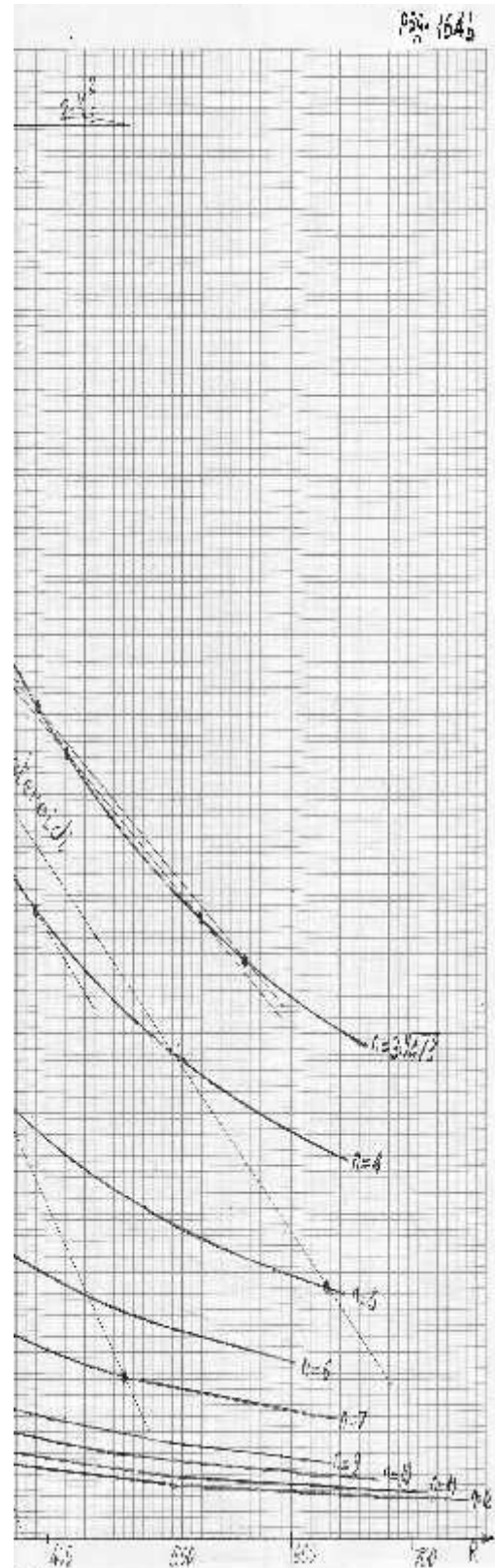
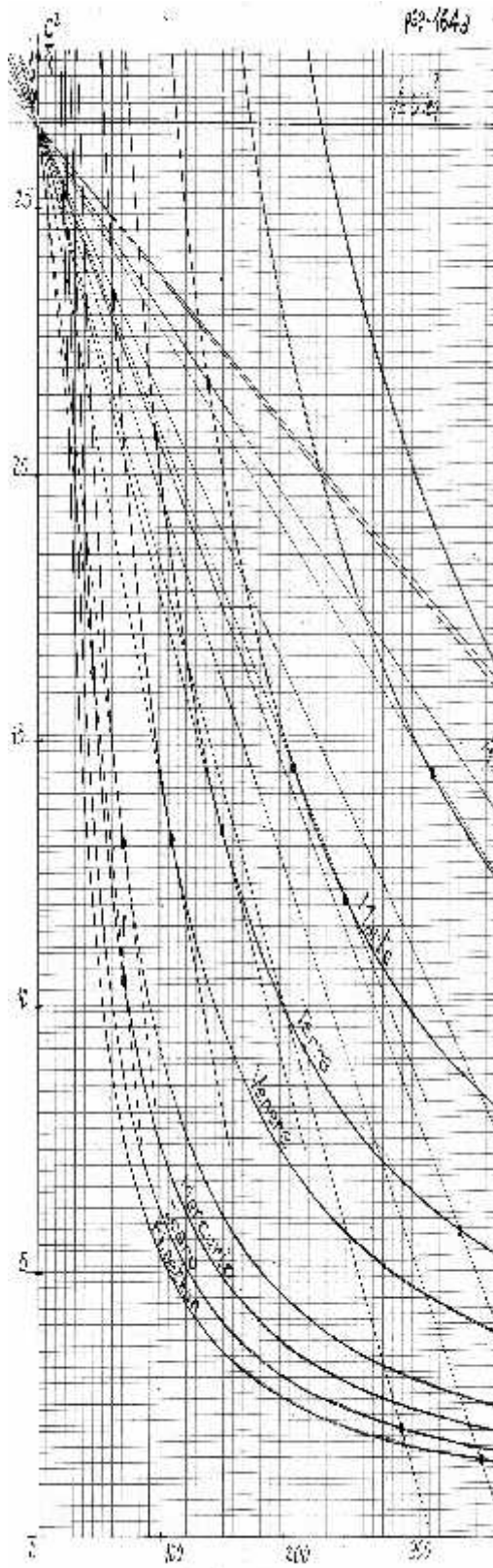
Su ogni orbita circolare di raggio R_n , si avrà quindi :

$$C_n = V_n \cdot R_n = (K^2 \cdot R_n)^{\frac{1}{2}} ; \quad V_{\text{eqn}} = \left(\frac{K^2}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In uno studio grafico di tutto lo spazio rotante, si avrà dunque la famiglia di curve :

$$\left[V^2 - 2 \cdot V_{\text{eqn}}^2 \right] \cdot R + 2 \cdot K^2 \geq \frac{C_n^2}{R}$$

Per esempio, per il sistema Solare si ricavano le curve riportate nelle pagine seguenti.



2128n

Per una più facile lettura dei risultati grafici, risolviamo anche analiticamente il sistema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}^2 = \left[v^2 - 2 \cdot V_{\text{eqn}}^2 \right] + \frac{2 \cdot K^2}{R} - \left[R \cdot \dot{\vartheta} \right]^2 \\ R^2 \cdot \dot{\vartheta} = C \end{array} \right\}$$

equivalente a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{\alpha^2 - u^2} \\ \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{R^2} \end{array} \right\}$$

da cui deriva l'equazione :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \pm \frac{C}{R^2 \sqrt{\alpha^2 - u^2}}$$

essendo :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \frac{d\vartheta}{du} \cdot \frac{du}{dR} = - \frac{C}{R^2} \cdot \frac{d\vartheta}{du}$$

sostituendo si ottiene :

$$d\vartheta = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \cdot du \quad \text{con } \alpha^2 > u^2$$

Integrando, si ricava l'equazione della traiettoria :

2128p

$$R = \frac{P}{1 + e \cdot \cos \theta} ; P = \frac{C^2}{K^2} ; e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} [v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2]}$$

Per tutto lo spazio rotante, con semplici sostituzioni si ricava :

$$P_n = \frac{C_n^2}{K^2} = \frac{K^2 \cdot R_n}{K^2} = R_n = R_{eq}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{R_n}{K^2} [V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2]} = \sqrt{\frac{V^2}{V_{eqn}^2} - 1} = \sqrt{\frac{V^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

Tutte le traiettorie stabili possibili, in uno spazio rotante caratterizzato dal valore K^2 , saranno dunque descritte dalle relazioni :

$$R = \frac{R_n}{1 + e \cdot \cos \theta} ; e = \sqrt{\frac{V^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

con : $n = 1 ; \sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{2} ; 2 ; 3 ; \dots n_s$

E' quindi possibile avere soluzioni reali, e quindi orbite stabili, solo per $V^2 \cdot R_n > K^2$ che equivale a $\alpha^2 > u^2$.

Per chiarire quanto è stato esposto può essere utile uno studio grafico.

Ricaviamo innanzitutto gli estremi del campo di esistenza delle orbite stabili su ciascuna falda dello spazio rotante.

Riprendendo la condizione :

$$\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right) \cdot R^2 + 2 \cdot K^2 \cdot R - C \geq 0$$

2128q

e risolvendo, si ricavano gli estremi :

$$R = \frac{K^2}{\left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \cdot \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} \cdot \left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \right]$$

Dovendo essere, per la realtà fisica, necessariamente $R \geq 0$, le soluzioni accettabili risultano le seguenti :

$$1 - \text{con} \left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right) > 0 \text{ equivalente a } V^2 > \frac{2 \cdot K^2}{R} \text{ oppure, indicando}$$

con V_f la velocità di fuga dall'orbita, $V > \sqrt{2} \cdot V_{eq} = V_f$ si ottiene :

$$R > \frac{K^2}{\left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} \cdot \left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} - 1 \right]$$

In questo caso, si ha un solo punto di inversione della velocità radiale e ne risulta così una traiettoria aperta.

Se indichiamo con r_0 l'unico punto in cui la traiettoria risulta perpendicolare al raggio vettore (**perielio**), si avrà :

$$\dot{R} = 0 ; V = v_0 ; C = r_0 \cdot v_0 ; V_{eq}^2 = \frac{K^2}{r_0}$$

e quindi, sostituendo, si ha :

$$\frac{K^2}{\left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right)} = \frac{r_0}{\left(e - 1 \right)}$$

$$\text{da cui si ricava : } e = \left[\frac{v_0^2 \cdot r_0}{K^2} - 1 \right] \text{ oppure : } e = \left[1 - \frac{v_A^2 \cdot r_A}{K^2} \right]$$

dove r_A indica l'afelio.

In definitiva, con $e > 1$ risulta :

2128r

$$R > \frac{r_0}{(e - 1)} \cdot (e - 1) = r_0$$

L'espressione analitica della traiettoria è una iperbole espressa da :

$$R = \frac{r_0}{1 + e \cdot \cos \vartheta} \quad \text{con } e > 1$$

2 – Nel caso limite $(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2) = 0$ si ha $e = 1$ e la traiettoria risulta

una parabola espressa dalla relazione : $R = \frac{r_0}{1 + \cos \vartheta}$

3 – Per $0 < (2 \cdot V_{eq}^2 - V^2) < \frac{K^4}{C^2}$

equivalente a : $V_{eq}^2 < V^2 < 2 \cdot V_{eq}^2$ oppure a : $V_{eq} < V < V_f$, si ottiene :

$$R = r_0 \cdot \frac{(1 \pm e)}{(1 - e)} \quad \text{con } e < 1 ; \quad r_0 = \text{perielio}$$

sarà quindi :

$$r_0 \leq R \leq r_0 \frac{(1 + e)}{(1 - e)}$$

e la curva che descrive l'orbita risulta l'ellisse espressa dalla relazione :

$$R = \frac{r_0(1 + e)}{1 + e \cdot \cos \vartheta} \quad \text{con } e < 1$$

4 – Nel caso limite in cui si ha $V^2 = V_{eq}^2$
 risulta :

$$R = r_0 = \text{costante} \quad \text{con} \quad r_0 = \frac{C^2}{K^2} ; \quad \mathbf{e} = \mathbf{0} .$$

In questo caso, la traiettoria, è diventata coincidente con la più piccola orbita circolare stabile che si può realizzare fisicamente nello spazio rotante considerato ed è associata all'unico punto reale, appartenente al campo di esistenza, in corrispondenza del quale diventano tangenti

la curva
$$\gamma = \frac{C^2}{R}$$

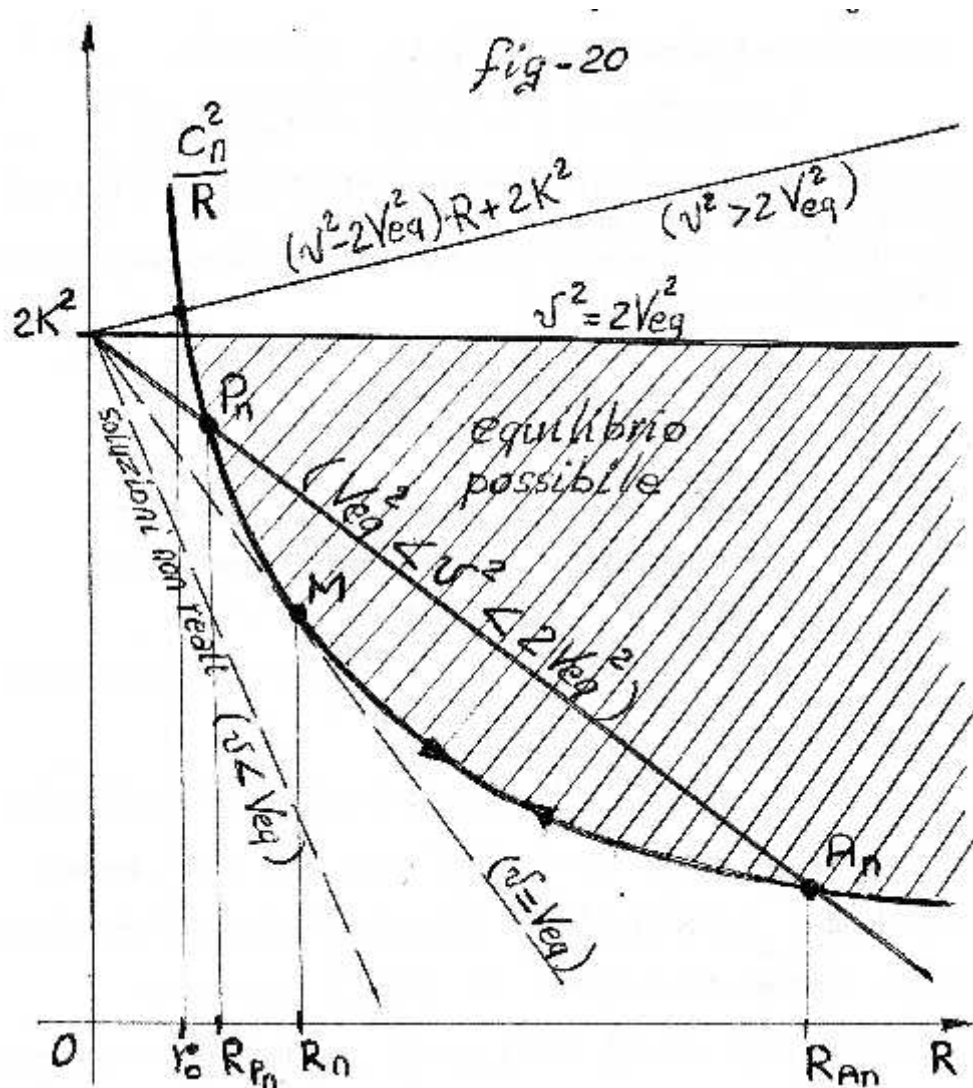
con la retta
$$\gamma' = \left(V^2 - 2 \cdot V_{eq}^2 \right) \cdot R + 2 \cdot K^2$$

5 – Per $V^2 < V_{eq}^2$ si ha $\alpha^2 < u^2$ e non risultano soluzioni reali.

Se siamo sull'orbita n - esima , non essendo possibile una soluzione reale dell'equazione del moto per $R = R_n - dR$, anche una riduzione minima di energia provoca il passaggio "istantaneo", (nel senso che non sono individuabili posizioni intermedie) sull'orbita associata a R_{n+1} , con la emissione della differenza di energia sottoforma di perturbazione dello spazio rotante.

E' chiaro che la perturbazione dell'equilibrio associata all'emissione di energia avrà una durata "limitata nel tempo", uguale a un semiperiodo orbitale, richiesto per passare da un livello all'altro.

Tutte le situazioni che sono state descritte vengono chiarite nella figura 20 .



Se l'analisi non è limitata alla falda Π - esima, ma si estende a tutto il raggio

d'azione dello spazio rotante K^2 , essendo $V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R_n}$, per qualsiasi

valore assegnato della velocità V^2 , esisterà sempre, nello spazio rotante che viene considerato, un valore n al quale è associato un valore del raggio R_n

tale che sia $V^2 \geq V_{eq}^2$ (precisamente $R_n = \frac{K^2}{V^2}$) in modo da poter far

2128u

rientrare il problema nei casi già esaminati.

In definitiva, note le orbite circolari minime stabili possibili :

$$R_n = \frac{R_1}{n^2} = \frac{C_n^2}{K^2} = \frac{C_1^2}{n^2 \cdot K^2}$$

con $n = 1 ; \sqrt{\frac{4}{3}} ; \sqrt{2} ; 2 ; 3 ; 4 \dots n_s$

una massa m qualsiasi (**anche** $m \rightarrow 0$), che entri nello spazio rotante preso in considerazione, andrà a collocarsi sulla prima orbita che incontra capace

di soddisfare la relazione $R_n \leq \frac{K^2}{V^2}$.

Essendo, generalmente, $R_n \neq \frac{K^2}{V^2}$, **la traiettoria iniziale sarà una**

ellisse con l'afelio situato nel punto in cui s'inserisce la massa m con

velocità iniziale $V^2 < V_{eqA}^2 = \frac{K^2}{R_A}$.

In queste condizioni, la forza d'interazione tra la massa m e lo spazio

rotante

è orientata verso il punto **P** (**perielio**) e dà origine ad un'accelerazione tale da soddisfare in ogni momento **la legge delle aree** .

Nel punto **P** si avrà $V^2 > V_{eqP}^2$ e la forza che agisce sulla massa m diventa centrifuga, per cui essa si allontana dal centro decelerando, sempre secondo la legge delle aree, fino al punto **A** (**afelio**), dove inizia un nuovo ciclo.

Questo meccanismo può essere messo in evidenza anche utilizzando il principio di conservazione dell'energia.

Si deve innanzitutto considerare che :

Una massa in perfetto equilibrio, su un' ORBITA CIRCOLARE, in uno spazio rotante non perturbato, avendo velocità orbitale perfettamente coincidente, in ogni momento, con la velocità di equilibrio della falda di spazio in cui si muove, presenta velocità di scorrimento relativo nulla rispetto allo spazio fisico circostante e dunque tra essi, NON SI PUO' TEORICAMENTE, realizzare nessuno scambio di energia.

Questa è la condizione che " **si realizza perfettamente** ", o quasi, negli atomi non eccitati e nei nuclei atomici i quali, per questa ragione, risultano praticamente stabili, con dei tempi di decadimento infinitamente lunghi.

Se assumiamo questa come situazione di riferimento, è chiaro che l'energia effettivamente disponibile **per lo scambio sarà quella che eccede** il valore che la massa m possiede quando si trova in equilibrio sull'orbita circolare di raggio minimo.

Se ipotizziamo uno scambio di energia direttamente proporzionale al valore della velocità di scorrimento relativo tra la massa in movimento e lo spazio fisico circostante, possiamo ritenere la variazione dell'energia della massa sulla traiettoria equivalente a quella data dall'azione di una forza frenante.

Lo scambio di energia può essere quindi descritto attraverso l'accelerazione agente sulla massa unitaria, che si può esprimere con una relazione del tipo :

$$a_s = -\beta \cdot (V - V_n).$$

Se indichiamo con $X = (R - R_n)$ la distanza dall'orbita circolare stabile, di raggio R_n , si ottengono le accelerazioni :

$$a = -\frac{K_s^2}{R^3} \cdot X \quad ; \quad a_s = -\beta \cdot \frac{dX}{dt}$$

ricordiamo che l'espressione di a è stata ricavata con la condizione che

durante il moto si abbia : $V \cdot R = \text{costante}$.

L'equazione del moto diventa dunque :

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{K_s^2}{R^3} \cdot X = 0$$

La sua risoluzione consiste nel cercare una soluzione del tipo:

$$X = X_0 \cdot e^{\gamma \cdot t}$$

Sostituendo nell'equazione iniziale, derivando e mettendo in evidenza $e^{\gamma \cdot t}$,
si ottiene l'equazione :

$$e^{\gamma \cdot t} \cdot \left(\gamma^2 + \beta \cdot \gamma + \frac{K_s^2}{R^3} \right) = 0$$

Poiché l'esponenziale non si annulla mai, dovrà essere :

$$\left(\gamma^2 + \beta \cdot \gamma + \frac{K_s^2}{R^3} \right) = 0$$

Le cui radici sono:

$$\gamma_1 = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{K_s^2}{R^3}} \quad ; \quad \gamma_2 = -\frac{\beta}{2} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} - \frac{K_s^2}{R^3}}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale risulta una combinazione lineare delle due soluzioni, ossia del tipo :

$$X(t) = X_1 \cdot e^{\gamma_1 \cdot t} + X_2 \cdot e^{\gamma_2 \cdot t}$$

Trattandosi di due radici complesse coniugate, e considerando che per $t = 0$
dovrà essere $X = X_{\max}$, la soluzione diventa :

$$X = X_{\max} \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t) \quad \text{con } \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{K_s^2}{R^3} - \frac{\beta^2}{4}}$$

ricordando ora la relazione :

$$\begin{aligned} X_{\max} &= R - R_{\max} = R \cdot \left(1 - \frac{R_{\max}}{R} \right) = \\ &= R \cdot \left(1 - \frac{R_n}{1-e} \cdot \frac{1-e^2}{R_n} \right) = -R \cdot e \end{aligned}$$

sostituendo si ha quindi l'equazione dell'orbita :

$$R = \frac{R_n}{1 + e \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot t} \cdot \cos(\omega \cdot t)}$$

$$\text{con : } e = \frac{R_{\max} - R_{\min}}{R_{\max} + R_{\min}} = \sqrt{\alpha} \quad ; \quad \omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = \sqrt{\frac{K_s^2}{R^3} - \frac{\beta^2}{4}}$$

sulla quale si verifica la conservazione del momento angolare specifico, che viene espresso dalla relazione (da cui deriva la legge delle aree) :

$$V \cdot R = \text{costante}$$

Si tratta di un'orbita ellittica con una eccentricità che si riduce ad ogni periodo secondo la relazione :

$$e(t) = e(t=0) \cdot e^{-\frac{\beta}{2} \cdot t}$$

Ricordando che l'eccentricità dell'orbita è in relazione con l'eccesso ΔE di

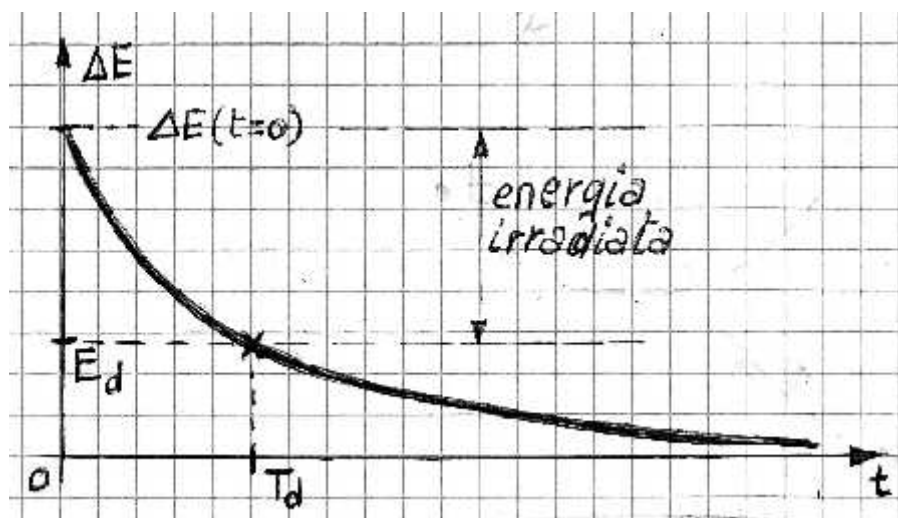
energia rispetto al valore associato all'equilibrio sull'orbita circolare, secondo

la relazione $e = \sqrt{\frac{\Delta E}{E_{eq}}}$, sostituendo, si ottiene l'espressione dell'eccesso

di energia disponibile dopo un tempo t dalla formazione del sistema e quindi l'energia che viene liberata se la massa in orbita "cade" sull'orbita circolare stabile dopo un tempo t dall'immissione sull'orbita ($t = 0$). Si ha dunque :

$$\Delta E = \Delta E_{(t=0)} \cdot e^{-\beta \cdot t}$$

con l'andamento indicato in figura.



Il diagramma mette in evidenza che subito dopo la formazione del sistema, con orbita molto eccentrica, viene irradiata, **attraverso l'emissione di onde gravitazionali**, una energia molto elevata, che tende a zero man mano che l'orbita si avvicina a quella circolare, associata all'equilibrio stabile.

Dopo un tempo T_d l'energia irradiata sarà $E_r = \Delta E_{(t=0)} - E_d$ dove con E_d abbiamo indicato l'**eccesso di energia residuo**, della massa in orbita, rispetto al valore associato all'orbita circolare stabile, che si raggiungerà teoricamente con $t \rightarrow \infty$.

E' chiaro che, se la massa orbitante, **dopo un tempo T_d** , "cade" sull'orbita circolare direttamente, **in un solo periodo orbitale emetterà tutta l'energia residua E_d** , con un " pacchetto " di onda gravitazionale di durata uguale al periodo orbitale.

Questa situazione è frequente soprattutto nei nuclei atomici, dove il pacchetto di onde elettromagnetiche emesse, in accordo con quanto abbiamo previsto teoricamente, presenta un valore elevato di energia E_d se il valore del tempo T_d è basso, mentre diventa molto basso, quando il tempo di decadimento è molto elevato, tendente a infinito per i nuclei stabili.

Negli spazi rotanti puri come, per esempio, **quelli atomici e nucleari**, in cui non sono presenti aggregati materiali vaganti, l'unica diminuzione di energia è quella prodotta dalla radiazione associata al moto accelerato della massa sull'orbita ellittica e quindi risulta $\beta \rightarrow 0$ con tempi $T_d \rightarrow \infty$.

Questo comporta una notevole stabilità dell'orbita, con evoluzione nel tempo praticamente irrilevante.

Assume invece valori molto piccoli, e dunque si trascura, nello **spazio vuoto ordinario**, dove sono comunque presenti aggregati subatomici e subfotonici in grandi quantità.

Valori elevati del coefficiente β si hanno solo in presenza di atmosfere con aggregati molecolari.

In questo caso il raggio dell'orbita **presenta un valore critico** oltre il quale il moto di rivoluzione cessa e la massa planetaria si muove direttamente verso il centro dello spazio rotante.

Ponendo $\omega = 0$, il valore critico del raggio risulta : $R_{cr} = \left(\frac{2}{\beta} \cdot K_s \right)^{\frac{2}{3}}$

oppure, la velocità critica :

$$V_{cr} = \left(\frac{\beta \cdot K_s^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

2128z1

Nei casi in cui si può assumere $\beta = 0$, il periodo orbitale diventa :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{R^3}{K_s^2}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R^{\frac{3}{2}}}{K_s}$$

Tale relazione coincide con la terza legge di Keplero.

Sostituendo il valore medio del raggio (semiasse maggiore) :

$$R = \frac{R_n}{(1 - e^2)}$$

si ottiene il periodo orbitale :

$$T = \frac{T_n}{(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se si sostituisce l'espressione del raggio : $R_n = R_1 \cdot p^2$
per le orbite circolari stabili si può ancora scrivere :

$$T_n = T_1 \cdot p^3$$

Nello spazio vuoto ordinario il fattore di smorzamento β assume un valore molto basso e le velocità non sono molto diverse dai valori che si hanno in condizioni di equilibrio, per cui il raggio delle orbite risulta con una evoluzione apprezzabile, ma molto lenta nel tempo.

Nel caso dell'atomo, **trascurando per adesso circostanze che verranno considerate in seguito**, in prima approssimazione, è possibile analizzare la situazione in modo relativamente semplice, considerando lo **spazio rotante** atomico generato da **Z** particelle centrali "**tutte uguali tra loro**" ed in orbita un uguale numero di particelle "**anch'esse uguali tra loro**".

Questa impostazione **comporta una notevole semplificazione nei calcoli** e anche comportamenti degli aggregati particolarmente interessanti.

Per esempio, nella teoria generale, per il raggio dell'orbita fondamentale, per prima orbita stabile, dello spazio rotante atomico, è stata ricavata la relazione

$$R_{1e} = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

dove R_{11e} rappresenta il raggio dell'orbita fondamentale (prima orbita con $p = 1$) dell'atomo formato da $Z = 1$.

Per l'orbita generica, associata al numero quantico p , si ricava :

$$R_{ZPe} = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$$

essendo anche :

$$K_{ZPe}^2 = K_p^2 \cdot Z$$

sostituendo si ottiene il periodo orbitale T_{ZPe} dell'elettrone in moto su qualsiasi orbita di qualsiasi atomo :

$$T_{ZPe} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{ZPe}^{\frac{3}{2}}}{K_{ZPe}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{11e}^{\frac{3}{2}} \cdot Z^{\frac{1}{2}} \cdot p^3}{K_p \cdot Z^{\frac{1}{2}}}$$

semplificando si ricava :

$$T_{ZPe} = T_{11e} \cdot p^3$$

Questa relazione è di estrema importanza per lo studio degli atomi e del nucleo, in quanto ci dice che il periodo di rivoluzione T_{ZP} delle particelle in orbita non dipende dallo spazio fisico considerato, ma solo dal livello dell'orbita p .

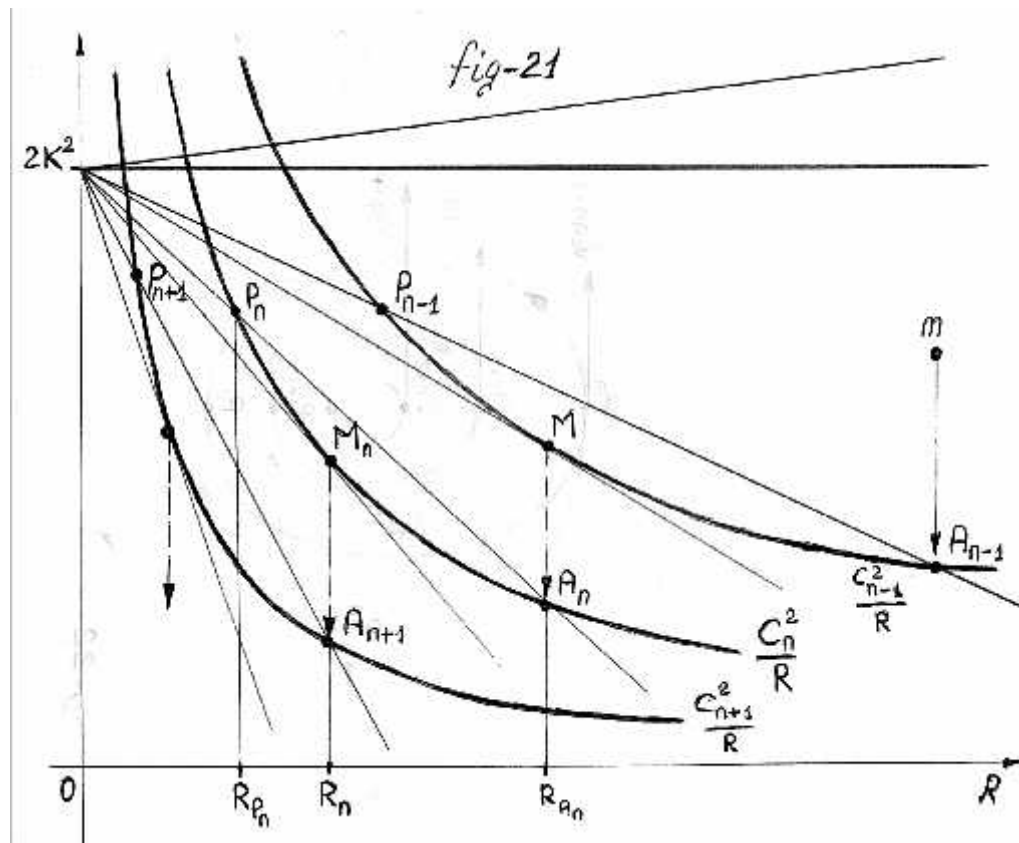
Questo vuol dire, per esempio, che tutti gli elettroni che si muovono sulla terza orbita, qualunque sia l'atomo considerato, si muovono con un periodo pari a :

$$T_{3e} = T_{11e} \cdot 3^3 = 1.51982985 \cdot 10^{-19} \text{sec} \cdot 27 = 4.103540595 \cdot 10^{-18} \text{sec}$$

Con $p = p_s$ si ottiene il periodo associato all'orbita periferica dell'atomo.

Le masse in moto sulle orbite circolari riescono a scambiare energia con lo spazio rotante circostante **solo se vengono eccitate ed allontanate dalla condizione di equilibrio.**

Se consideriamo uno spazio rotante con tutte le sue orbite stabili, possiamo riportare su un diagramma le curve sulle quali le masse possono muoversi nel rispetto dei principi di conservazione ed otteniamo la figura 21.



Quando la massa m s'immette nello spazio con una certa energia e occupa la falda di raggio R_n , inizialmente si ha un'orbita ellittica e molto eccentrica, che si riduce sempre più fino a diventare circolare quando viene raggiunto il raggio minimo nel punto M .

A questo punto è ancora possibile il moto su un'orbita reale (capace dunque di soddisfare i principi di conservazione) **avente una eccentricità** :

$$e = \sqrt{\frac{\Delta E_n}{E_{eqn}}} = \sqrt{\frac{E_{eq(n-1)}}{E_{eqn}} - 1}$$

2128z4

Il punto M viene quindi " **istantaneamente** " interpretato come afelio A_n dell'orbita eccentrica indicata in figura 22 .

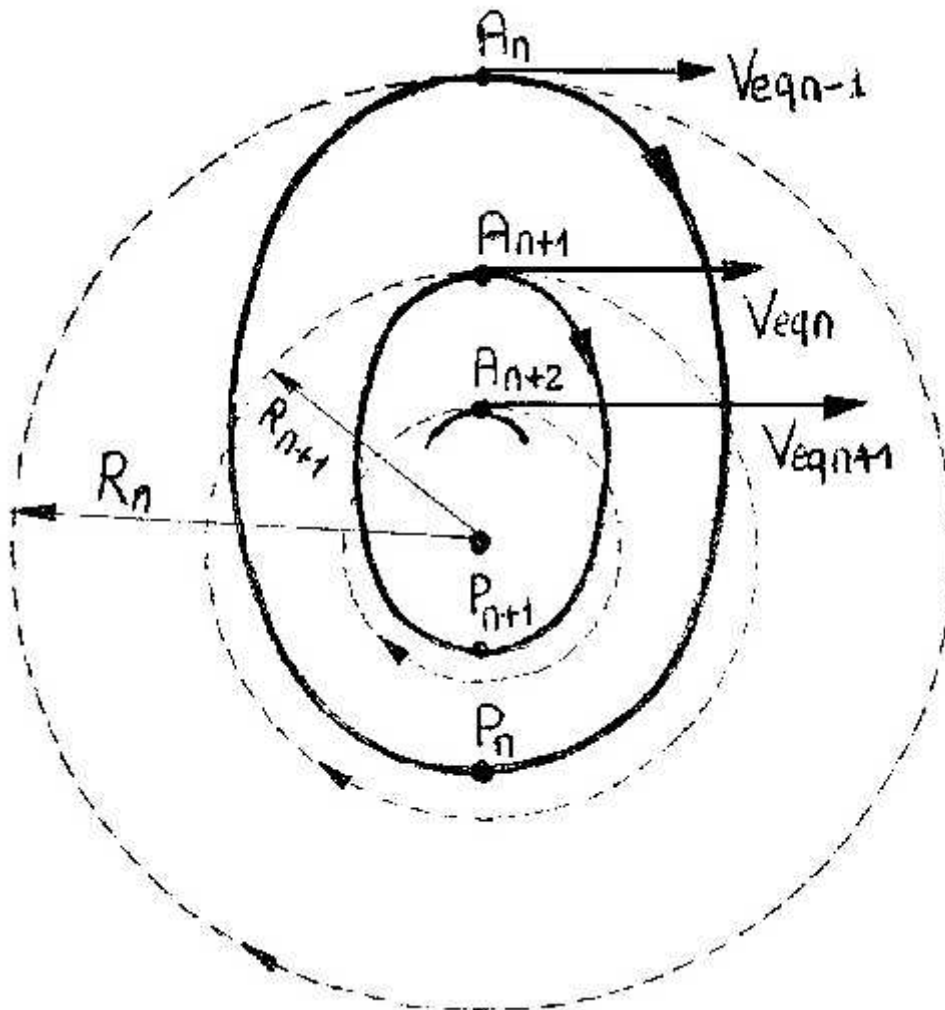


figura 22

In definitiva, quando la massa M giunge nel punto M , non si verifica nessun effetto particolarmente rilevante o improvviso.

Si ha semplicemente **il passaggio da un'orbita circolare**, che presenta uno scambio di energia con lo spazio rotante **molto basso** (tendente a zero), **a un'orbita molto eccentrica**, con scambio di energia **inizialmente elevato**, che si riduce gradualmete con l'eccentricità, **fino a zero**, in corrispondenza

del punto M_n al quale corrisponde l'orbita circolare minima con $\Delta E_n = 0$.

Inizia a questo punto un nuovo ciclo con il nuovo eccesso di energia ΔE_{n+1} .
Si ha così il passaggio " **istantaneo** " all'afelio dell'orbita ellittica successiva associata alla falda di raggio minimo R_{n+1} ed inizia un nuovo ciclo con orbita iniziale molto eccentrica, tra i punti $A_{n+1} = R_{n+1}$ ed il perielio P_{n+1} .

Si continua così fino a quando la massa orbitante " **precipita** " nel centro che genera lo spazio rotante K^2 .

Il valore minimo R_n rappresenta dunque il raggio della sfera di confine che separa due falde spaziali consecutive e l' eccentricità dell' orbita si presenta come il mezzo attraverso il quale si riesce a realizzare comunque l'equilibrio della massa m in moto su un'orbita il cui raggio oscilla attorno al valore R_n anche se la sua velocità non è esattamente V_{eqn} .

Tutte le relazioni sono state ricavate senza alcuna ipotesi restrittiva, per cui **la evoluzione che abbiamo descritto si applica a qualsiasi spazio rotante, sia astronomico che atomico o nucleare.**

Per esempio, **per il sistema Solare** le curve che descrivono l'evoluzione dei pianeti sulle orbite sono quelle riportate nelle pagine **2128n** e **2128o** dalle quali si rileva una buona coincidenza dell'afelio e del perielio delle orbite con i valori previsti dalla teoria.

Per lo studio dei sistemi atomici esistono ottime teorie alternative che, come vedremo, fondano le loro basi su ipotesi ad hoc e principi che non vengono dimostrati, ma hanno il grande pregio di fornire risultati in ottimo accordo con l'esperienza in molti casi reali.