estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**

dalla meccanica celeste alla fisica nucleare

– Onde elettromagnetiche e gravitazionali, equazioni di Maxwell e significato fisico di rotore e divergenza

Ricordiamo che, se è assegnata una superficie S, si definisce densità della corrente e si indica con $\vec{J}$, un vettore il cui **flusso attraverso** S è uguale alla corrente elettrica I :

$$I = \int_S \vec{J} \times \overrightarrow{dS}$$

L'equazione di continuità afferma che **il flusso della densità di corrente** $\vec{J}$ **uscente da una qualsiasi superficie chiusa** S **è uguale alla variazione della carica elettrica racchiusa all'interno**.

Ricordiamo che, se V_i è il volume delimitato dalla superficie chiusa S, viene definita divergenza del vettore $\vec{J}$ il limite :

$$\operatorname{div}\vec{J} = \nabla \times \vec{J} = \lim_{V_i \to 0} \frac{1}{V_i} \int_S \vec{J} \times \overrightarrow{dS}$$

si ricava : $$\left(\operatorname{div}\vec{J}\right) = \frac{dJ_x}{dx} + \frac{dJ_y}{dy} + \frac{dJ_z}{dz} = \nabla \times \vec{J}$$

e vale il teorema :

$$\int_V \left(\operatorname{div}\vec{J}\right) dv = \int_S \vec{J} \times \overrightarrow{dS}$$

che consente di passare da un integrale di volume a uno di superficie.

Fisicamente la $\operatorname{div}\vec{J}$ vuole indicare una caratteristica puntuale ($\lim V_i \to 0$) dello spazio. In particolare, indica la variazione che subisce la caratteristica $\vec{J}$ in un punto P del volume considerato.

Se si ha $\operatorname{div}\vec{J} > 0$, vuol dire che in quel punto il valore di J aumenta, ossia si ha una sorgente di J e quindi, per la continuità dello spazio fisico, si dovrà avere un flusso di J che esce da una qualsiasi superficie chiusa che abbia il punto P al suo interno.

Si raggiungerà quindi una condizione di equilibrio stazionario se l'aumento di J, espresso dalla $\operatorname{div} \vec{J}$, uguaglia il flusso netto uscente dall'intero volume racciuso dalla superficie scelta.

Viceversa, se $\operatorname{div} \vec{J} < 0$, si ha un pozzo di J , ossia un punto in cui il valore di J diminuisce e quindi si raggiungerà un equilibrio quando la diminuzione è uguale al flusso che entra complessivamente dalla superficie chiusa S.

Se $\operatorname{div} \vec{J} = 0$, il flusso netto (somma di quello uscente più quello entrante) che attraversa la superficie chiusa S è nullo e questo indica che il valore di J nel punto considerato si mantiene costante nel tempo.

Se si indica con ϱ_q la densità di carica, l'equazione di continuità diventa :

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{d\varrho_q}{dt} = 0 \qquad \text{ovvero :} \qquad \nabla \times \vec{J} = -\frac{d\varrho_q}{dt}$$

Integrando entrambi i membri rispetto a un volume definito V , si ha :

$$\int_V \left(\nabla \times \vec{J} \right) dv = - \int_V \frac{d\varrho_q}{dt} dv$$

Applicando ora **il teorema della divergenza**, che è stato ricordato, al primo membro si può sostituire l'integrale della divergenza del vettore $\vec{J}$ esteso al volume V con il flusso dello stesso vettore uscente dalla superficie S che lo racchiude.

L'equazione di continuità diventa quindi :

$$I = \int_S \vec{J} \times \overrightarrow{dS} = - \int_V \frac{d\varrho_q}{dt} dv$$

nel caso stazionario sarà ovviamente : $\qquad \dfrac{d\varrho_{q}}{dt} = \mathbf{0}$

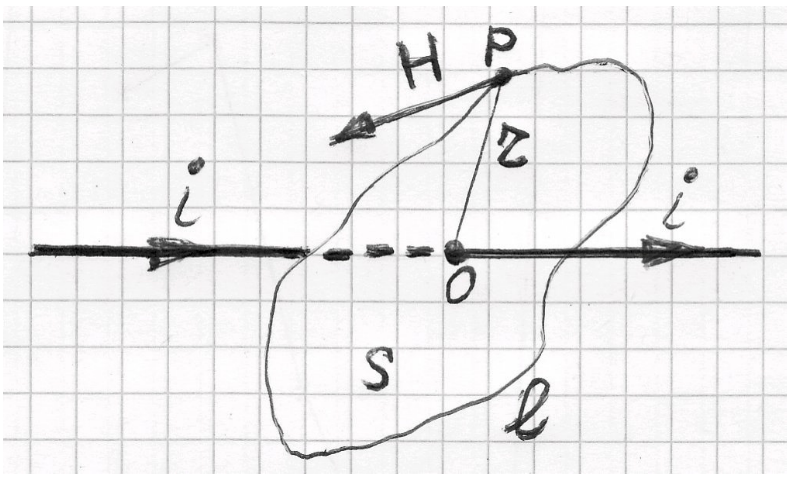
Trattando il magnetismo planetario e quello atomico, abbiamo visto che se si ha una sfera solare in equilibrio stazionario con lo spazio rotante generato, in qualsiasi condizione debbono essere soddisfatti i principi di conservazione.

In particolare, si deve verificare in ogni istante la conservazione del momento angolare del sistema, dato dalla somma vettoriale del contributo fornito **dalla rotazione** delle masse in moto su se stesse più quello associato al **moto di rivoluzione**.
E' chiaro che, essendo una somma vettoriale, **è possibile variare il risultato** anche solo cambiando l'orientamento dei vettori nello spazio.

Se quindi, per una qualsiasi ragione, in un punto dello spazio fisico si verifica una variazione del momento angolare, nello spazio circostante si verifica una polarizzazione degli elementi spaziali (rotanti), che vengono orientati in modo da fornire un momento angolare contrario alla variazione iniziale.

Sia **sui pianeti del sistema Solare che nell'atomo**, abbiamo verificato che si ha una proporzionalità fra il momento angolare della massa rotorivoluente sull'orbita e l'induzione $\vec{B}$ del campo magnetico associato.

Il processo viene descritto con la legge di Ampère, generalizzata da Maxwell.



2150

Essa afferma che, se abbiamo una corrente i, che attraversa nel punto O la la superficie S delimitata dalla linea chiusa l, su ogni punto P di tale linea è possibile individuare un vettore $\overrightarrow{H}$ tale che la sua circuitazione sia uguale alla corrente i :

$$\int_l \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{dl} = \int_S \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{dS}$$

Ricordiamo ora che il rotore di un vettore è definito dalla relazione :

$$\text{rot}\,\overrightarrow{J} = \lim_{S \to 0} \frac{1}{S} \int_l \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{dl}$$

si ricava : $$\text{rot}\,\overrightarrow{J} = \nabla \Lambda \overrightarrow{J} =$$

$$= \left(\frac{dJ_z}{dy} - \frac{dJ_y}{dz} \right) \cdot \overrightarrow{n_x} + \left(\frac{dJ_x}{dz} - \frac{dJ_z}{dx} \right) \cdot \overrightarrow{n_y} + \left(\frac{dJ_y}{dx} - \frac{dJ_x}{dy} \right) \cdot \overrightarrow{n_z}$$

e si dimostra il teorema :

$$\int_S \left(\text{rot}\,\overrightarrow{J} \right) \times \overrightarrow{dS} = \int_l \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{dl}$$

applicandolo alla circuitazione di $\overrightarrow{H}$, si ha :

$$\int_S \left(\text{rot}\,\overrightarrow{H} \right) \times \overrightarrow{dS} = \int_l \overrightarrow{H} \times \overrightarrow{dl}$$ e quindi : $$\int_S \left(\text{rot}\,\overrightarrow{H} \right) \times \overrightarrow{dS} = \int_S \overrightarrow{J} \times \overrightarrow{dS}$$

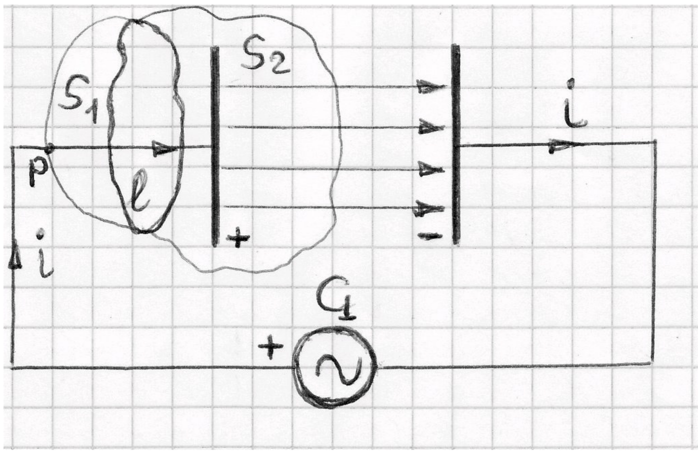
da cui deriva : $$\left(\text{rot}\,\overrightarrow{H} \right) = \overrightarrow{J}$$

La definizione del campo magnetico $\overrightarrow{H}$ serve solo per mettere in relazione il magnetismo con la causa che lo produce ma, dal punto di vista pratico, non è utilizzabile direttamente, in quanto prescinde dal mezzo in cui il processo si sviluppa, mentre noi sappiamo che il livello di polarizzazione dipende anche dalle caratteristiche del mezzo.

Si definisce dunque un vettore $\overrightarrow{B}$, detto induzione magnetica, proporzionale ad $\overrightarrow{H}$ con costante μ caratteristica del mezzo, indicata come **permeabilità**

magnetica : $\vec{B} = \mu \cdot \vec{H}$

Consideriamo ora un condensatore carico, come in figura.



Scegliamo una linea chiusa l che delimiti la superficie S_1, che è attraversata dalla corrente i nel punto P , e la S_2 , che non è attraversata dalla corrente i , ma solo dalle linee del campo elettrico che attraversano lo spazio compreso tra le due armature.

Se ora applichiamo **la legge di Ampère** alla superficie S_1 , la circuitazione dell'induzione magnetica $\vec{B}$ risulta proporzionale al valore della corrente i che attraversa il circuito per giungere sulle armature.

$$\int_l \vec{B} \times \vec{dl} = \mu \cdot \int_S \vec{J} \times \vec{dS} = \mu \cdot i$$

Quando consideriamo la S_2, ritroviamo in entrata è la stessa corrente i, ma non si ha flusso uscente.

E' a questo punto che Maxwell, per rendere il sistema consistente, prendendo in considerazione **il fatto**, osservato sperimentalmente, **che anche un campo elettrico variabile nel tempo è capace di generare un campo magnetico**, **pensò di "estendere l'equazione di continuità" nella forma generale al caso non stazionario**.

2152

$$\nabla \times \vec{J} + \frac{d\varrho_q}{dt} = \mathbf{0}$$

Per raggiungere lo scopo, immaginò che in un regime transitorio **il secondo termine potesse assumere valore non nullo**.

Per uniformarsi con il primo, ipotizzò la relazione : $\nabla \times \vec{D} = \varrho_q$

con il vettore $\vec{D}$ proporzionale al campo elettrico attraverso una **costante** ε **caratteristica del mezzo** : $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{K_e}$

scrivendo così **l'equazione di continuità generalizzata** nella forma :

$$\nabla \times \left(\vec{J} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right) = \mathbf{0}$$

il termine $\vec{J_s} = \dfrac{d\vec{D}}{dt}$ viene detto **densità di corrente di spostamento**.

sostituendo, si ottiene l'espressione dell'induzione magnetica :

$$\int_l \vec{B} \times \vec{dl} = \mu \bullet \int_S \left(\vec{J} + \varepsilon \cdot \frac{d\vec{K_e}}{dt} \right) \times \vec{dS}$$

e quindi **la legge di Ampère–Maxwell** :

$$\int_l \vec{B} \times \vec{dl} = \mu \bullet i + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d}{dt} \int_S \vec{K_e} \times \vec{dS}$$

oppure la forma alternariva :

$$\left(\mathrm{rot}\, \vec{B} \right) = \mu \cdot \vec{J} + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d\vec{K_e}}{dt}$$

Questa legge mette in relazione un campo elettrico variabile nel tempo con il campo magnetico da esso generato.

2153

Esiste l'osservazione sperimentale **speculare**, che mostra come **un campo magnetico variabile nel tempo generi corrente in un circuito**.

L'analisi teorica del problema si deve a Faraday, che, con la legge che porta il suo nome, afferma :
La **forza elettromotrice** indotta in un circuito chiuso da un campo magnetico è uguale, ma di segno opposto, alla variazione nella unità di tempo del flusso dell'induzione magnetica $\overrightarrow{B}$ concatenato con il circuito stesso, ovvero :

$$\text{f.e.m.} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Ricordando la definizione di f.e.m. e di flusso concatenato, si ha :

$$\int_l \overrightarrow{K_e} \times \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dS} - \int_S \frac{d\overrightarrow{B}}{dt} \times \overrightarrow{dS}$$

applicando il teorema di Stokes a primo membro, si ha :

$$\int_l \overrightarrow{K_e} \times \overrightarrow{dl} = \int_S \left(\text{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) \times \overrightarrow{dS}$$

e quindi : $$\int_S \left(\text{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) \times \overrightarrow{dS} = -\int_S \frac{d\overrightarrow{B}}{dt} \times \overrightarrow{dS}$$

e in definitiva : $$\left(\text{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) = -\frac{d\overrightarrow{B}}{dt}$$

Riassumendo, in regime transitorio, ai campi elettromagnetici si applicano le equazioni di Maxwell :

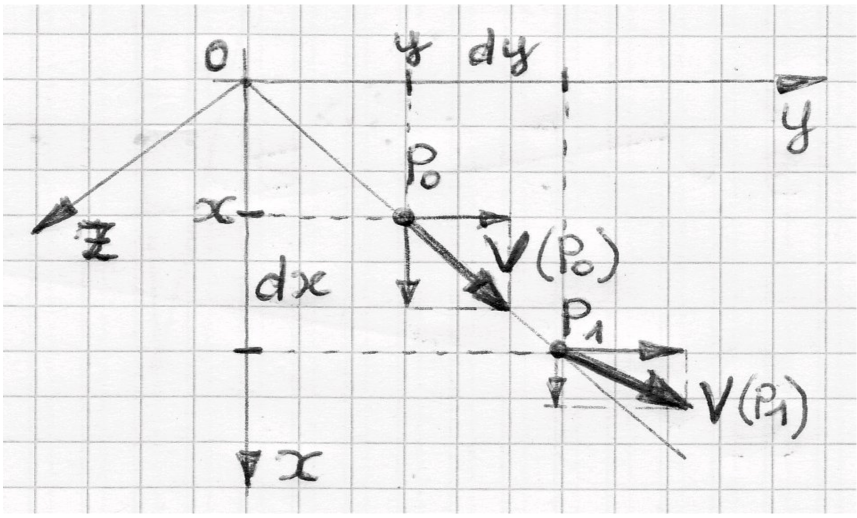
– nella forma integrale $$\int_l \overrightarrow{K_e} \times \overrightarrow{dl} = -\frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dS}$$

$$\int_l \overrightarrow{B} \times \overrightarrow{dl} = \mu \cdot i + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d}{dt}\int_S \overrightarrow{K_e} \times \overrightarrow{dS}$$

– **nella forma differenziale** $\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) = -\dfrac{d\overrightarrow{B}}{dt}$

$$\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}\right) = \mu \cdot \overrightarrow{J} + \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d\overrightarrow{K_e}}{dt}$$

Per una corretta lettura di queste relazioni, chiariamo il **significato fisico del rotore di un vettore** $\overrightarrow{V}$ in un punto P dello spazio.



Con riferimento alla figura, consideriamo un vettore $\overrightarrow{V}(x,y,z)$ in un punto P_0 dello spazio descritto con il sistema di assi di riferimento **x** , **y** , **z** .

$\overrightarrow{V}(P_0\ ,x,y)$ sarà la proiezione sul piano $(x\ ,\ y)$, avente le coordinate **x** e **y.**

Con un piccolo spostamento del vettore $\overrightarrow{V}(P,x,y)$ nello spazio, la proiezione sul piano $(x\ ,\ y)$ diventerà $\overrightarrow{V}(P_1\ ,x_1,y_1)$, con coordinate :

$$\mathbf{x_1 = x + dx \ ; \ y_1 = y + dy}$$

Durante lo spostamento del vettore da P_0 a P_1 le sue componenti sono state

2155

incrementate di : $\mathrm{dV_y} = \dfrac{d\mathrm{V_y}}{d\mathrm{x}} \cdot \mathrm{dx}$; $\mathrm{dV_x} = \dfrac{d\mathrm{V_x}}{d\mathrm{y}} \cdot \mathrm{dy}$

La differenza fra i due incrementi ci fornisce una misura della tendenza della componente $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P_0}, x, y)$ a ruotare, sul piano $(x\ ,\ y)$, rispetto alla direzione che ha nel punto $\mathrm{P_0}$.

Se, per semplicità di esposizione, poniamo $\mathrm{dx} = \mathrm{dy}$, la tendenza a ruotare sul piano sarà fornita dalla differenza :

$$\Delta = \left(\frac{d\mathrm{V_y}}{d\mathrm{x}} - \frac{d\mathrm{V_x}}{d\mathrm{y}} \right) \cdot \mathrm{dx}$$

se $\Delta > 0$ si avrà una rotazione nel verso antirario, nel verso opposto se $\Delta > 0$. Indichiamo questa differenza come la componente di un vettore con direzione perpendicolare al piano $(x\ ,\ y)$ che abbiamo considerato, coincidente quindi con l'asse **z** .

Considerando, in maniera analoga le componenti sui piani $(y\ ,\ z)$ e $(z\ ,\ x)$, e sommando, si ottiene il vettore $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$, che fornisce la rotazione di $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$ nello spazio attorno al punto P.

Se $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}) = \mathbf{0}$ il vettore $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$ non ruota e dunque avrà nello spazio sempre la stessa direzione.

E' da notare che il $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$ non dà alcuna indicazione sul valore di $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P})$, ma solo sulla variazione della direzione nel tempo.
E' chiaro quindi che $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}) \neq 0$ implica $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}) \neq 0$, ma $\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}) = 0$ non non implica affatto $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{P}) = 0$.

Riprendiamo ora il problema del condensatore sferico con $\mathrm{R_2} \to \infty$, dunque la sfera di raggio $\mathrm{R_1}$ carica positivamente. In queste condizioni, in ogni punto dello spazio si ha un campo elettrico costante nel tempo :

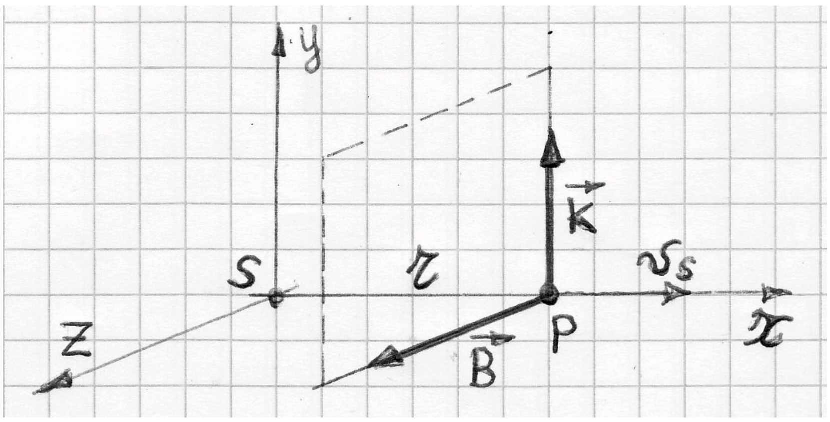
$$K_e(r) = \frac{q_s}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Se, a questo punto, colleghiamo la sfera a un generatore di tensione variabile nel tempo con legge sinusoidale, sulla sfera si separerà una carica elettrica q_s che avrà lo stesso andamento nel tempo, secondo la relazione :

$$q_s(t) = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R_1 \cdot V_G(t)$$

La carica variabile sulla sfera genera una perturbazione che si propaga nello spazio per onde, con le modalità che abbiamo visto.

Se consideriamo un punto ad una distanza dalla sfera $r >> R_1$, possiamo considerare la propagazione **per onde piane** in direzione radiale, secondo lo schema semplificato di figura.



Dato che la simmetria sferica del sistema rende **il campo elettrico variabile solo nella direzione del raggio**, il rotore si riduce solo alla derivata rispetto al raggio. La legge di Ampère – Maxwell in forma differenziale diventa :

$$\left(\text{rot}\,\vec{B}\right) = -\frac{d\vec{B}}{dr} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d\overrightarrow{K_e}}{dt}$$

Abbiamo visto però che **la propagazione per onde** della perturbazione, che nasce variabile solo nel tempo, la rende variabile anche nello spazio con una velocità di propagazione V_s caratteristica del mezzo.

Dunque risulta anche $\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) \neq 0$ e quindi si ha anche :

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = -\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{K_e}\right) = -\frac{d\overrightarrow{K_e}}{dr}$$

In definitiva, nel punto P abbiamo i campi elettrico $\overrightarrow{K_e}$ e magnetico $\vec{B}$ che si rigenerano a vicenda, secondo le relazioni :

$$\frac{d\overrightarrow{K_e}}{dt} \rightarrow \frac{d\overrightarrow{K_e}}{dr} = -\frac{d\vec{B}}{dt} \rightarrow -\frac{d\vec{B}}{dr} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d\overrightarrow{K_e}}{dt}$$

e si propagano nello spazio con la velocità V_s .

Derivando la prima equazione rispetto a r e la seconda rispetto a t si ottiene

$$\frac{d^2\overrightarrow{K_e}}{dr^2} = -\frac{d\vec{B}}{dtdr} \quad ; \quad -\frac{d^2\vec{B}}{drdt} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \frac{d^2\overrightarrow{K_e}}{dt^2}$$

da cui si ricava :

$$\frac{d^2\overrightarrow{K_e}}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}\frac{d^2\overrightarrow{K_e}}{dr^2}$$

Derivando invece la prima equazione rispetto a t e la seconda rispetto a r si ottiene :

$$\frac{d^2\vec{B}}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}\frac{d^2\vec{B}}{dr^2}$$

2158