estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**

dalla meccanica celeste alla fisica nucleare

– Vettore di Poynting,energia delle onde elettromagnetiche e gravitazionali,

Ricordiamo che una perturbazione sinusoidale $X(t)$ prodotta in un punto O dello spazio si propaga per onde in direzione radiale, secondo la relazione :

$$X(t\,;r) = X_{max} \cdot sen(\omega)\left(t - \frac{r}{V_s} \right)$$

dalla quale si ottiene : $$\frac{dX(t\,;r)}{dt} = - V_s \cdot \frac{dX(t\,;r)}{dr}$$

e quindi, derivando ancora, l'equazione caratteristica della propagazione per onde :

$$\frac{d^2 X(t\,;r)}{dt^2} = V_s^2 \cdot \frac{d^2 X(t\,;r)}{dr^2}$$

Confrontando questa espressione con quelle dei campi elettrico e magnetico

si vede che la loro velocità di propagazione vale : $$V_s^2 = \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu}$$

Utilizzando l'osservazione sperimentale che le onde elettromagnetiche, nello spazio vuoto, si propagano con la velocità della luce, si pone :

$$V_s^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0} = C_l^2$$

Utilizzando la definizione di potenziale (elettrico o gravitazionale), abbiamo ricavato l'espressione della potenza trasferita da una corrente di elettroni in regime stazionario : $P = V \cdot i$

Nello spazio vuoto, in presenza solo di un campo elettromagnetico, bisogna generalizzare questa relazione, sostituendo la corrente di spostamento alla i.

Considerando uno spostamento infinitesimo dr nella direzione del moto, la tensione tra i due punti vale : $dV = \overrightarrow{K_e} \times \overrightarrow{dr} = K_e \cdot dr$

la corrente di spostamento vale :

$$di_s = \overrightarrow{J_s} \times \overrightarrow{dS} = J_s \cdot dS = dS \cdot \varepsilon \cdot \frac{dK_e}{dt}$$

La potenza trasferita dal volume di spazio fisico $d\nu = dS \cdot dr$ sarà quindi :

$$dP = dV \cdot di_s = K_e \cdot dr \cdot dS \cdot \varepsilon \cdot \frac{dK_e}{dt} = \frac{d\nu}{dt} \cdot \varepsilon \cdot K_e \cdot dK_e =$$

$$= \frac{d\nu}{dt} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{2} \cdot d\left(K_e^2\right)$$ da cui si ricava :

$$dP \cdot \frac{dt}{d\nu} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot d\left(K_e^2\right)$$

Indicando con $E_{\nu,t}$ l'energia trasferita dal volume unitario nell'unità di tempo, integrando tra **0** e K_e , si ottiene :

$$E_{\nu,t}(K_e) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot K_e^2$$

Per il campo magnetico, si ha : $\left(\mathrm{rot}\,\overrightarrow{B}\right) = -\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dr} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \dfrac{\overrightarrow{dK_e}}{dt}$

ricordando che : $\dfrac{\overrightarrow{dB}}{dr} = -\dfrac{1}{C_l} \cdot \dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt} = -\sqrt{\varepsilon \cdot \mu} \cdot \dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt}$

si ottiene: $\sqrt{\varepsilon \cdot \mu} \cdot \dfrac{\overrightarrow{dB}}{dt} = \varepsilon \cdot \mu \cdot \dfrac{\overrightarrow{dK_e}}{dt}$ ossia : $\overrightarrow{dB} = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu} \cdot \overrightarrow{dK_e}$

2160

e quindi, integrando :

$$B = \sqrt{\varepsilon \cdot \mu} \cdot K_e \quad \text{ossia :} \quad \frac{B^2}{\mu} = \varepsilon \cdot K_e^2$$

sostituendo nell'espressione di $E_{v,t}(K_e)$, si ottiene l'energia trasferita, dal volume unitario nell'unità di tempo, dall'induzione magnetica B :

$$E_{v,t}(B) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu} \cdot B^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot B^2 = E_{v,t}(K_e)$$

l'energia trasferita complessivamente dal campo elettromagnetico, **dal volume unitario nell'unità di tempo**, **sarà** :

$$E_{v,t}(K_e\,;B) = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot K_e^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\mu} \cdot B^2 = \varepsilon \cdot K_e^2 = \frac{1}{\mu} \cdot B^2$$

Si deve notare che il trasferimento di energia avviene sempre nella direzione ortogonale al piano individuato dai vettori $\overrightarrow{K_e}$ e $\overrightarrow{B}$ e quindi è possibile dare anche questa informazione, esprimendo l'energia $E_{v,t}(K_e\,;B)$ utilizzando il loro prodotto vettoriale.

Scriviamo l'energia $E_{v,t}(K_e\,;B)$ nella forma :

$$E^2_{v,t}(K_e\,;B) = \varepsilon \cdot K_e^2 \cdot \frac{1}{\mu} \cdot B^2 = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot K_e^2 \cdot B^2$$

da cui :

$$E_{v,t}(K_e\,;B) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot K_e \cdot B = \frac{\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}{\mu} \cdot K_e \cdot B$$

Si definisce **vettore di Poynting** il prodotto vettoriale :

$$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{K_e} \Lambda \overrightarrow{H} = \frac{1}{\mu} \cdot \overrightarrow{K_e} \Lambda \overrightarrow{B}$$

e si ha quindi : $$\overrightarrow{E_{v,t}}(K_e ; B) = \frac{1}{C_l} \cdot \overrightarrow{K_e} \Lambda \overrightarrow{H}$$

Si ha quindi la relazione :

$$\overrightarrow{P} = C_l \cdot \overrightarrow{E_{v,t}}(K_e ; B)$$

A secondo membro abbiamo la potenza che attraversa la superficie unitaria. Si ha infatti :

$$C_l \cdot E_{v,t} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dE_{v,t}}{dv} = \frac{dr}{dt} \cdot \frac{dE_{v,t}}{dr \cdot dS} = \frac{dP_{v,t}}{dS}$$

Se abbiamo uno spazio sede di un campo elettromagnetico e consideriamo un volume finito V, delimitato dalla superficie chiusa S, si potrà enunciare il principio di conservazione dell'energia, dicendo che :

il " flusso dell'energia uscente " dalla superficie chiusa S nell'unità di tempo (potenza uscente) è uguale alla variazione, che si verifica nella unità di tempo, dell' energia $E_{v,t}(K_e ; B)$ disponibile nel volume V da essa racchiuso.

Usando il vettore di Poynting, si ha :

$$\int_S \overrightarrow{P} \times \overrightarrow{dS} = \int_V \frac{dE_{v,t}(K_e ; B)}{dt} \cdot dv$$

applicando il teorema della divergenza al primo membro, si ottiene :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{P} + \frac{dE_{v,t}(K_e ; B)}{dt} = \mathbf{0}$$

che esprime **l'equazione di continuità dell'energia**.

A questo punto notiamo che tutte le equazioni sono state ricavate utilizzando il campo elettrico, ma si possono ricavare allo stesso modo, con riferimento al campo gravitazionale.

2162

Bisogna però considerare che esiste già una teoria della gravitazione ormai acquisita e non è sempre possibile rivedere delle definizioni per adattarle ad un nuovo impianto teorico.

Se consideriamo, per esempio, il campo elettrico, esso viene definito come vettore il cui flusso uscente da una superficie chiusa è uguale al valore della carica elettrica presente nel volume da essa racchiuso.
In un sistema a simmetria sferica, con la carica elettrica posta al centro si ha

così la relazione : $$K_e = \frac{q_s}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}$$

nella quale q_s si assume come concetto primitivo che soddisfa il principio di conservazione.

Talvolta viene data la **definizione operativa di campo elettrico attraverso la forza che esso esercita su una carica esploratrice**.
Viene così introdotto il lavoro che si compie quando la forza esercitata sposta la carica unitaria di un tratto dr nella direzione del campo.

Si arriva quindi a definire il **potenziale e la differenza di potenziale** tra due punti, in termini di energia e dunque di accesso reale. Infatti, il motore di tutte le trasformazioni, **in qualsiasi campo**, è **il generatore di tensione**.
Esso rappresenta il punto di partenza per qualsiasi analisi.

Se vogliamo trattare il prolema con gli spazi rotanti, in questo caso abbiamo l'osservazione sperimentale e la giustificazione teorica che la materia, posta in un punto qualsiasi dello spazio fisico, rende lo spazio circostante capace di imporre in ogni punto la condizione di equilibrio :

$$V^2 \cdot R = K_s^2$$

verificata sia in campo astronomico che atomico e nucleare.

K_s^2 **diventa così una costante del sistema**, **che non dipende dal punto considerato**, **ma solo dalla materia posta nel centro**.

Nello spazio considerato sarà dunque possibile definire un vettore $\overrightarrow{K_m}$ il cui

2163

flusso uscente da una superficie chiusa sia uguale al valore K_s^2 generato nel volume da essa racchiuso. Si verificherà quindi :

$$\int_s \overrightarrow{K_m} \times \overrightarrow{dS} = \int_V \delta_{K_S^2} \cdot dv$$

dove con $\delta_{K_S^2}$ abbiamo indicato la densità della materia nel volume di spazio considerato. In uno spazio con simmetria sferica si ottiene :

$$K_m = \frac{K_s^2}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r^2}$$

dove α rappresenta una costante caratteristica del mezzo in cui K_s^2 agisce. Se in questo spazio alla distanza R dal centro poniamo una massa m su di essa si manifesta una forza :

$$\overrightarrow{F_m} = \overrightarrow{K_m} \cdot m$$

Questo ci consente di definire un potenziale in termini di lavoro :

$$dL_m = \overrightarrow{F_m} \times \overrightarrow{dl} = \overrightarrow{K_m} \times \overrightarrow{dl} \cdot m$$

Con riferimento alla massa unitaria, per uno spostamento finito, dal punto A al punto B , si definisce la differenza di potenziale, o **tensione** tra il punto A e il punto B**,** l'integrale :

$$V_{mAB}\left(\frac{\text{Joule}}{K_g}\right) = \int_A^B dL_m = \int_A^B \overrightarrow{K_m} \times \overrightarrow{dl}$$

Nel nostro sistema a simmetria sferica, passando da R_1 a R_2 , si ricava :

$$V_{mAB}\left(\frac{\text{Joule}}{K_g}\right) = \int_A^B \overrightarrow{F_m} \times \overrightarrow{dl} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{K_s^2}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r^2} \cdot dr$$

e con $R_2 \to \infty$ si ottiene il valore del potenziale assoluto presente nel punto distante r dal centro :

$$V_m\left(\frac{\text{Joule}}{K_g}\right) = \int_{\infty}^{r} \overrightarrow{F}_m \times \overrightarrow{dl} = \frac{K_s^2}{4 \cdot \pi \cdot \alpha \cdot r}$$

Dato che nelle teorie correnti il potenziale gravitazionale è già definito

dalla relazione : $$V_m\left(\frac{\text{Joule}}{K_g}\right) = \frac{K_s^2}{r}$$

per lo spazio vuoto, per conservare la validità della definizione nota, si dovrà

assumere : $$\alpha = \frac{1}{4 \cdot \pi}$$

Abbiamo a questo punto una perfetta analogia di comportamento tra campo elettrico e gravitazionale, per cui , qualsiasi trattazione potrà essere riferita a uno oppure all'altro, adattando semplicemente la simbologia usata.

2165