estratto da : **L'EQUILIBRIO UNIVERSALE**
dalla meccanica celeste alla fisica nucleare
– **Origine teorica e risoluzione dell'equazione d'onda di Schrödinger**, **significato dello stato quantico**

Dare un significato all'equazione di Schroedinger è molto difficile, in quanto essa viene ottenuta attraverso passaggi **solo formalmente corretti**, senza alcuna preoccupazione per l'aspetto fisico.
Il passo più importante e piuttosto arduo è **l'accostamento dell'equazione di Hamilton a quella delle onde di d'Alembert**.

Questa equazione rappresenta l'origine della meccanica ondulatoria e, come tutta la meccanica quantistica, viene considerata applicabile **solo ai sistemi atomici e subatomici**, fino alle particelle virtuali presenti nello spazio vuoto.

Con la teoria degli spazi rotanti abbiamo dimostrato che **la quantizzazione** delle orbite stabili in un sistema organizzato da un'azione centrale **è imposta unicamente dai principi di conservazione dell'energia e del momento angolare**, che hanno valore universale.

Partendo da questa osservazione, vogliamo dunque dimostrare che tutta la meccanica quantistica, e dunque **l'equazione di Schrodinger**, deve essere applicabile a qualsiasi spazio rotante, dal subnucleare all'astronomico.

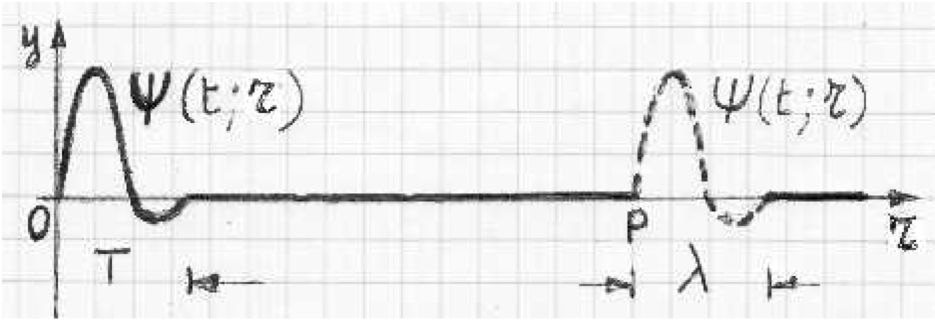
A questo punto ricordiamo che, se in un punto dello **spazio fisico si genera una perturbazione sinusoidale** di una grandezza che definisce l'equilibrio tra il punto considerato e lo spazio circostante, "**la perturbazione generata** si propaga per onde **nello spazio e nel tempo**" (Art. 25).

In altre parole, se indichiamo con $\psi\left(\mathbf{0}\,;\,t\right) = \psi\left(\mathbf{0}\,;\,\mathbf{0}\right) \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot t\right)$

la legge spazio–temporale che descrive la perturbazione indotta sulla grandezza considerata, attorno alla condizione di equilibrio nel punto O di figura, dove abbiamo indicato una corda di lunghezza infinita, l'esperienza ci dice che, **attraverso il legame che esiste con i punti dello spazio fisico circostante**, la perturbazione $\psi\left(\mathbf{0}\,;\,t\right)$ si trasferisce ad essi con una velocità V_s costante e caratteristica dello spazio considerato. Quello che si propaga è dunque una **perturbazione dell'equilibrio dello spazio** (nell'esempio la corda) .

2254a

Se lo spazio è vuoto oppure i suoi punti non sono interagenti fra loro (spazio geometrico), nessuna perturbazione potrà essere trasferita.



Il punto P, posto alla distanza r da O verrà costretto, dalla continuità dello spazio fisico, a subire questa oscillazione

con un ritardo dato da : $\tau = \dfrac{r}{V_s}$.

Nel punto P si avrà dunque una perturbazione dello spazio espressa da :

$$\psi(r\,;t) = \psi(\mathbf{0}\,;\mathbf{0}) \cdot \mathrm{sen}\left(\omega \cdot \left(t - \frac{r}{V_s}\right)\right)$$

sostituendo $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$ e ponendo $V_s \cdot T = \lambda$; $k = \dfrac{2 \cdot \pi}{\lambda}$

si ha : $\psi(r\,;t) = \psi(\mathbf{0}\,;\mathbf{0}) \cdot \mathrm{sen}(\omega \cdot t - k \cdot r)$

oppure, con l'identità di Eulero : $\psi(r\,;t) = \psi(\mathbf{0}\,;\mathbf{0}) \cdot e^{-i \cdot (\omega \cdot t - k \cdot r)}$

Secondo tale relazione, la perturbazione prodotta nell'origine O, variabile nel tempo con legge sinusoidale, si propaga nello spazio con la stessa legge, e **risulta così variabile sia nel tempo che nello spazio**.

Con due derivazioni, si ricava l'equazione di d'Alembert, che indica in forma differenziale la perturbazione presente nel punto P al tempo t :

2254b

$$\frac{d^2\psi(r;t)}{dr^2} - \frac{1}{V_s^2}\cdot\frac{d^2\psi(r;t)}{dt^2} = 0$$

In questa relazione $\psi(r;t)$ non rappresenta una grandezza precisa, ma una **qualsiasi grandezza che varia nel tempo con legge sinusoidale**.
Se questa variazione **si produce nello spazio fisico**, per le caratteristiche stesse dello spazio, essa si propaga con la velocità V_s.

E'dunque la velocità di propagazione V_s che dipende dalla grandezza perturbata e quindi dà un significato alla funzione $\psi(r;t)$. Essa è però sempre una perturbazione prodotta su una caratteristica dello spazio.

Trattando le derivate come rapporto tra differenziali, l'equazione si riduce ad una identità, indipendente dalla funzione $\psi(r;t)$. Si ha infatti :

$$\frac{d^2\psi(r;t)}{dr^2} = \frac{1}{V_s^2}\cdot\frac{d^2\psi(r;t)}{dt^2} = \frac{d^2\psi(r;t)}{d(V_s\cdot t)^2}$$

equivalente a $r = V_s \cdot t$ qualunque sia la perturbazione $\psi(r;t)$ che viene presa in considerazione.

Per esempio, una particella in moto in un punto dello spazio può produrre una perturbazione della densità nello spazio occupato, del livello di energia o del campo elettromagnetico o altro ancora e ciascuna di queste perturbazioni si propagherà con una velocità caratteristica, che, **sostituita nell'equazione**, **dà il significato alla funzione** $\psi(r;t)$.
L'equazione ha valore assolutamente generale e si applica alla perturbazione della corda come a quella di una trave rigida o qualsiasi altro mezzo capace di trasferire una perturbazione.

Per esempio, se nel punto O abbiamo una massa ferma, si crea uno spazio rotante con essa in equilibrio. Una oscillazione della massa nel punto O **crea una perturbazione dello spazio rotante** che si propaga dal punto O a tutto lo spazio circostante.

2254c

Le caratteristiche dello spazio che vengono perturbate, in questo caso, sono indicate come **campo elettrico** e **campo magnetico** e si propagano come **campo elettromagnetico associato ad una onda elettromagnetica**, che soddisfa le equazioni di Maxwell (Art. 26) :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{K_e}}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu} \frac{d^2 \overrightarrow{K_e}}{dr^2} \quad ; \quad \frac{d^2 \overrightarrow{B}}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon \cdot \mu} \frac{d^2 \overrightarrow{B}}{dr^2}$$

coincidenti con l'equazione di d'Alembert.

L'equazione d'onda di d'Alembert ha dunque valore assolutamente generale e quindi l'elemento importante non è la grandezza $\psi\left(r\,;t\right)$ che si propaga, ma il meccanismo che essa descrive.

Possiamo sinteticamente dire che l'importanza dell'equazione di d'Alembert sta nella sua capacità di selezionare le perturbazioni fisicamente realizzabili da quelle che non lo sono, " **attraverso l'unico parametro presente nella relazione**, V_s **".**

Se V_s è una costante e risulta $V_s \neq 0\,,\infty$, qualunque sia la perturbazione che si considera, esiste sempre una funzione $\psi\left(r\,;t\right)$ che la descrive come una onda le cui caratteristiche dipendono da V_s **.**

Se invece il parametro V_s , per qualsiasi ragione, **dipende dallo spazio e /o dal tempo**, l'equazione d'onda diventa :

$$\frac{d^2 \psi\left(r\,;t\right)}{dr^2} - \frac{1}{V_s^2\left(r\,;t\right)} \cdot \frac{d^2 \psi\left(r\,;t\right)}{dt^2} = 0$$

Dato che la perturbazione considerata **si sviluppa e si propaga comunque nello spazio fisico**, sarà fisicamente realizzabile, e **dunque reale**, solo se verifica tutte le condizioni imposte dallo spazio stesso.
Nello spazio fisico da noi considerato queste condizioni sono rappresentate **dai principi di conservazione dell'energia e del momento angolare**.

2254d

La condizione in cui il parametro V_s non è costante si verifica, per esempio, quando lo spazio in cui si sviluppa la perturbazione non è omogeneo oppure se viene generata da una massa m in moto non equilibrato.

Il caso più comune, che si verifica in tutto l'universo, è quello di una massa in moto in uno spazio rotante, i cui punti devono verificare la legge fondamentale

$$V^2 \cdot R = K_s^2 = \textbf{costante}$$

e quindi rappresenta uno spazio nè omogeneo nè isotropo.

In questo caso i principi di conservazione e la realtà fisica impongono a V_s la dipendenza da parametri indipendenti che ammettono **soluzioni reali e non banali** dell'equazione solo quando assumono valori ben precisi che vengono indicati come **autovalori** e le soluzioni associate **autofunzioni**.

Ricordiamo che, se una particella si muove in un campo conservativo, in ogni momento verifica il principio di conservazione dell'energia, che, nella forma più semplice, si scrive : $E = E_c + E_p$

dove E_c , E_p ed E rappresentano l'energia cinetica, potenziale e totale.

Sostituendo l'energia cinetica $E_c = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{P^2}{2 \cdot m}$,

si ottiene l'equazione di Hamilton, che descrive il moto :

$$\frac{P^2}{2 \cdot m} - \left(E - E_p\right) = 0 \quad \text{da cui deriva :} \quad P = \sqrt{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}$$

A questo punto osserviamo che, se intercettiamo una massa in movimento, le caratteristiche attraverso le quali essa si manifesta sono l'energia e l'impulso che vengono trasmessi al ricevitore.

Se abbiamo quindi due masse che trasferiscono la stessa energia e lo stesso impulso, intercettandole, non si possono distinguere e dunque sono equivalenti (solo dal punto di vista delle caratteristiche rilevate).

Il ragionamento si applica, naturalmente, anche al fotone, in quanto anch'esso, durante il moto, trasferisce energia e impulso, che, se coincidono con quelli di un'altra massa, lo rendono da essa indistinguibile. Abbiamo quindi :

2254e

per una massa m : $E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$; $P = \frac{2 \cdot E}{V} = \frac{E}{V / 2}$

per il fotone : $E = h \cdot \nu$; $P = \frac{E}{C_l} = h \cdot \frac{\nu}{C_l} = \frac{h}{\lambda}$

Al fotone viene quindi associata un'onda che si sposta con la velocità di fase

$$\upsilon_{ff} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{h}{P} \cdot \nu = \frac{E}{P}$$

Seguendo il ragionamento di De Broglie, se una massa trasferisce lo stesso impulso, per essere indistinguibile dal fotone, dovrà essere rappresentabile con un'onda avente la stessa lunghezza d'onda, ossia :

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{m \cdot V}$$

Se trasferisce la stessa energia, dovrà anche essere :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{V}{2} \cdot P = \frac{V}{2} \cdot \frac{h}{\lambda} = h \cdot \nu$$

La velocità di fase dell'onda " materiale " risulta quindi :

$$\upsilon_{fm} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu = \frac{V}{2} = \text{metà della velocità della particella}$$

" A parità di energia trasferita", tra la frequenza dell'onda materiale ν_m e quella del fotone equivalente ν_f si ha quindi il rapporto :

$$\frac{\nu_m}{\nu_f} = \frac{V}{2 \cdot C_l}$$

In definitiva secondo De Broglie, **analogamente a quanto è previsto per il**

2254f

fotone, una particella materiale che trasferisce l'impulso P potrà presentare comportamento di carattere **corpuscolare** oppure **ondulatorio** in rapporto alle condizioni in cui vengono effettuati i rilievi.

La lunghezza d'onda associata al comportamento ondulatorio sia per il fotone che per qualsiasi massa " **è inversamente proporzionale allo impulso trasferito** ". Si ha quindi per la massa m :

$$\lambda = \frac{h}{P} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}}$$

La velocità di fase υ_m con la quale l'onda associata si propaga risulta :

$$\frac{\upsilon_m}{\nu} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}}$$

l'hamiltoniana diventa così :

$$\frac{1}{2 \cdot m} \cdot \frac{h^2 \cdot \nu^2}{\upsilon_m^2} - \left(E - E_p\right) = 0$$

Si tratta, a questo punto di capire che cosa descrive questa relazione.

Nella rappresentazione come particella in moto in uno spazio conservativo, la equazione di Hamilton, scritta nella forma : $V = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(E - E_p\right)}{m}}$

indica il valore della velocità che la massa m deve avere per poter verificare il principio di conservazione dell'energia.

Analogamente, nella rappresentazione come **un'onda in moto nello stesso spazio**, la relazione $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}}$

rappresenta **la lunghezza d'onda che la massa m deve manifestare** per

2254g

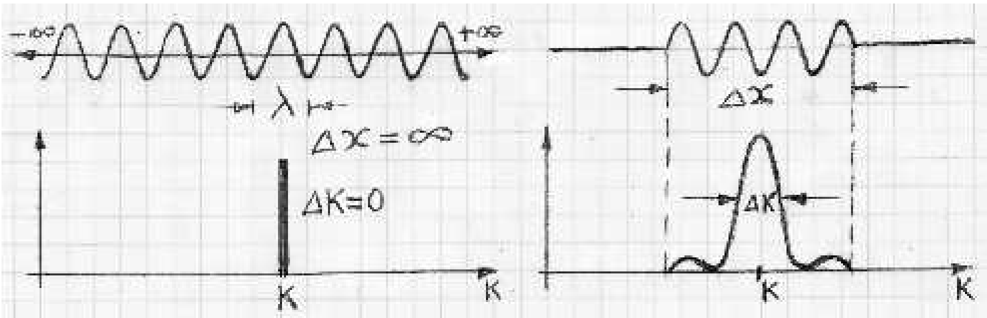
poter verificare il principio di conservazione dell'energia.

Per evitare errate interpretazioni della lunghezza d'onda λ, si deve ricordare che le onde rappresentano solo uno strumento per descrivere il trasferimento **di uno stato perturbato del mezzo** da un punto all'altro dello spazio fisico.

In realtà oltre " **allo stato perturbato** " non esiste quindi nulla che si sposta e questo vale naturalmente per la massa m come per il fotone.

La lunghezza d'onda λ non è quindi associata a una particolare caratteristica della particella in moto, ma a quella che si sta utilizzando per il rilievo.

L'onda associata è sempre comunque estesa nello spazio da $-\infty$ a $+\infty$ con lunghezza d'onda λ **costante** e numero d'onda $\mathbf{k} = \dfrac{\mathbf{2 \cdot \pi}}{\lambda}$.



Su un'onda armonica di questo tipo, infinitamente estesa, i punti dello spazio sono tutti identici fra loro e quindi non è più possibile individuare la massa m o il fotone con caratteristiche localizzate.

Se non esiste nulla che trasferisca energia e impulso, l'onda stessa non può trasferire nulla e quindi anche l'equazione di Hamilton associata perde il suo significato iniziale senza acquistarne un altro.

E' chiaro che **non ha nessun significato una perturbazione estesa per tutto lo spazio**, **presente da sempre e per sempre**.
Una perturbazione ha fisicamente un significato **solo se s'inserisce in uno spazio imperturbato**, **per un tempo limitato**.

Se vogliamo recuperare l'informazione legata alla particella come corpuscolo e consevare, nello stesso tempo, quelle legate all'onda associata, prendiamo in considerazione una perturbazione che si manifesta in uno **spazio limitato**

2254h

Δr con una **durata limitata** Δt , come è indicato in figura.

Così facendo non è però più possibile descriverla con un solo valore di **k**, ma solo attraverso la sua trasformata di Fourier, che ha un numero di componenti e quindi un intervallo del numero d'onda $\Delta \mathbf{k}$ tanto maggiore quanto minore è l'estensione nello spazio $\Delta \mathbf{x}$.

Lo stesso discorso può essere fatto utilizzando l'estensione nel tempo Δt e si parlerà in questo caso di intervallo di pulsazione $\Delta\omega$.

E' da tener presente che gli intervalli $\Delta \mathbf{x}$ oppure Δt non si possono scegliere arbitrariamente, in quanto le trasformate di Fourier soddisfano la condizione $\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta \mathbf{k} > \mathbf{1}$ e analogamente $\Delta\omega \cdot \Delta t > \mathbf{1}$.

Nel caso della particella in esame, abbiamo :

$$\Delta \mathbf{k} = \Delta\left(\frac{\mathbf{2} \cdot \pi}{\lambda}\right) = \Delta\left(\frac{\mathbf{2} \cdot \pi \cdot P}{h}\right) = \frac{\mathbf{2} \cdot \pi}{h} \cdot \Delta P$$

e quindi dovrà essere : $$\Delta \mathbf{x} \cdot \Delta P > \frac{h}{\mathbf{2} \cdot \pi}$$

analogamente, si ha :

$$E = h \cdot \nu = h \cdot \frac{\omega}{\mathbf{2} \cdot \pi} \quad \text{e quindi :} \quad \Delta\omega = \frac{\mathbf{2} \cdot \pi}{h} \cdot \Delta E$$

e dunque anche : $$\Delta E \cdot \Delta t > \frac{h}{\mathbf{2} \cdot \pi}$$

In definitiva, se abbiamo una particella, potrà essere descritta solo come un **pacchetto d'onda** centrato su **k**, formato da onde di diverse frequenze ν e diverse velocità di fase.

Qualunque sia la scelta di $\psi(r\,;\,t)$, la limitazione dei due intervalli localizza il pacchetto d'onde caratterizzato da due velocità :

– Velocità di fase : $$v_{\mathbf{f}} = \lambda \cdot \nu = \frac{h}{P} \cdot \frac{E}{h} = \frac{E}{P} = \frac{V}{\mathbf{2}}$$

2254i

uguale quindi a metà della velocità della particella.
Ricordando che :

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{h} \cdot E \;\; ; \;\; k = \frac{2 \cdot \pi}{h} \cdot P \;\; ; \;\; E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{P^2}{2 \cdot m}$$

– la velocità di gruppo sarà :

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dE}{dP} = \frac{2 \cdot P \cdot dP}{2 \cdot m} \cdot \frac{1}{dP} = \frac{P}{m} = V$$

coincidente con quella della particella.

Il fotone invece non può essere descritto come pacchetto d'onda in quanto la sua velocità è costante e quindi l'unica descrizione possibile è quella data da Maxwell come onda elettromagnetica, **che non è un pacchetto d'onde**.

Se si sostituisce l'espressione della velocità di fase dell'onda associata alla particella :

$$\upsilon_m = \frac{h \cdot \nu}{\sqrt{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}}$$

alla velocità di propagazione che compare nell'equazione di d'Alembert, si ottiene la relazione :

$$\frac{d^2 \psi\left(r\,;t\right)}{dr^2} - \frac{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)}{h^2 \cdot \nu^2} \cdot \frac{d^2 \psi\left(r\,;t\right)}{dt^2} = 0$$

che è già in sostanza l'equazione di Schrodinger.

In base all'origine dell'equazione di d'Alembert e a quanto abbiamo ricordato, possiamo dire che :

In questa equazione, la funzione $\psi\left(r\,;t\right)$ può rappresentare qualsiasi perturbazione indotta nello spazio dalla presenza della particella, che si propaghi con la velocità di fase υ_m .

Per risolvere l'equazione è necessario conoscere la legge con la quale varia l'energia nel tempo e nello spazio e in generale il calcolo non è semplice.

2254I

Per fortuna, nei casi più comuni l'energia non dipende dal tempo e questo ci permette di separare facilmente le variabili ponendo :

$$\psi(r\,;t) = \psi(r)\cdot\varphi(t)$$

sostituendo, derivando e dividendo per $\psi(r)\cdot\varphi(t)$, si ottiene :

$$\frac{h^2\cdot\nu^2}{2\cdot m\cdot(E-E_p)}\cdot\frac{d^2\,\psi(r)}{dr^2}\cdot\frac{1}{\psi(r)} = \frac{d^2\,\varphi(t)}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi(t)}$$

In questa equazione il primo membro dipende solo dalle coordinate spaziali ed il secondo solo da quella temporale. Essi potranno essere uguali solo se entrambi sono uguali ad una costante indipendente dal tempo e dallo spazio.

Ponendo la costante di separazione uguale a $-\,\omega^2$, si hanno quindi le due equazioni :

$$\frac{d^2\,\varphi(t)}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi(t)} = -\,\omega^2$$

$$\frac{h^2\cdot\nu^2}{2\cdot m\cdot(E-E_p)}\cdot\frac{d^2\,\psi(r)}{dr^2}\cdot\frac{1}{\psi(r)} = -\,\omega^2$$

Le soluzioni della prima equazione sono del tipo :

$$\varphi(t) = A\cdot e^{\pm i\cdot\omega\cdot t}$$

Per il nostro problema, trattandosi di una perturbazione imposta nell'istante $t = 0$, la funzione deve essere periodica **con valore iniziale uguale a zero** e quindi si assume :

$$\varphi(t) = e^{-i\cdot\omega\cdot t} = \mathrm{sen}(\omega\cdot t) \qquad \text{con} \qquad \omega = 2\cdot\pi\cdot\nu$$

derivando, si ha : $\displaystyle \frac{d^2\,\varphi(t)}{dt^2}\cdot\frac{1}{\varphi(t)} = -\,\omega^2 = -\,4\cdot\pi^2\cdot\nu^2$

2254m

sostituendo nella seconda equazione, si ottiene :

$$\frac{h^2 \cdot \nu^2}{2 \cdot m \cdot \left(E - E_p\right)} \cdot \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \cdot \frac{1}{\psi(r)} = -\,4 \cdot \pi^2 \cdot \nu^2$$

e quindi, in definitiva :

$$\frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m}{h^2} \cdot \left(E - E_p\right) \cdot \psi(r) = 0$$

Questa equazione viene detta **degli stati stazionari** , in quanto le grandezze che vi compaiono non dipendono dal tempo.

L'energia E compare nell'equazione come parametro imprecisato, che **non dipende dalla variabile** r , e si dimostra che **essa ammette soluzioni non banali** (non identicamente nulle) solo per determinati valori del parametro E, che vengono detti **autovalori** e le corrispondenti soluzioni **autofunzioni**.

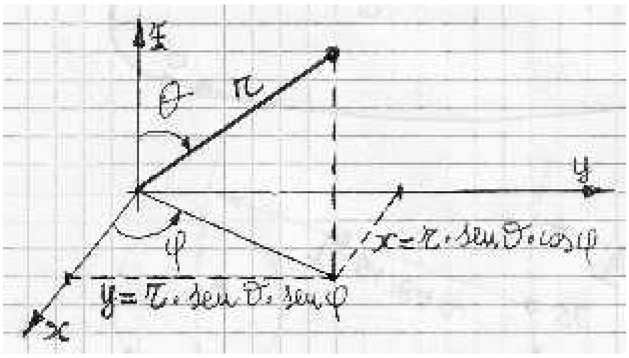
Per questi motivi l'equazione di Schrödinger sotto questa forma viene detta "**equazione agli autovalori per l'energia totale**" ed è scritta normalmente nella forma più generale :

$$-\,\frac{h^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot m} \cdot \nabla^2 \psi(r) + E_p \cdot \psi(r) = E_t \cdot \psi(r)$$

dove ∇^2 è l'operatore di Laplace, dato da :

– in coordinate cartesiane : $$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

oppure, trasformando $\psi(x\,;\,y\,;\,z)$ in $\psi(r\,;\,\vartheta\,;\,\varphi)$ con :



2254n

$$x = r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \cos\varphi \quad ; \quad y = r \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \quad ; \quad z = r \cdot \cos\vartheta$$

– in coordinate sferiche :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{\text{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\text{sen}\vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{\text{sen}^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right]$$

e quindi, in definitiva si ottiene l'equazione :

$$\frac{H^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot m} \cdot \nabla^2 \psi\left(r ; \vartheta ; \varphi\right) + \left(E_t - E_p\right) \cdot \psi\left(r ; \vartheta ; \varphi\right) = 0$$

Con il metodo della separazione delle variabili, poniamo :

$$\psi\left(r ; \vartheta ; \varphi\right) = R(r) \cdot T(\vartheta) \cdot F(\varphi)$$

sostituendo le derivate come sono indicate dall'operatore di Laplace, se si moltiplica per $\left(r^2 \cdot \text{sen}^2\vartheta\right)$ e si divide per $R(r) \cdot T(\vartheta) \cdot F(\varphi)$, si ha :

$$\frac{\text{sen}^2\vartheta}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{\text{sen}\vartheta}{T} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\text{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial T}{\partial \vartheta}\right) +$$

$$+ \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m}{h^2} \cdot \left(r^2 \cdot \text{sen}^2\vartheta\right) \cdot \left(E_t - E_p\right) = -\frac{1}{F} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

Il primo membro dipende solo da r e ϑ , ed il secondo solo da φ. Entrambi devono quindi essere uguali a un valore costante che indichiamo con p^2 .

Si ha dunque : $$\frac{\partial^2 F(\varphi)}{\partial \varphi^2} + p^2 \cdot F(\varphi) = 0$$

Come abbiamo già visto, le soluzioni di questa equazione sono sinusoidi del tipo :

$$F_p(\varphi) = e^{\pm i \cdot p \cdot \varphi}$$

2254o

Dovendo assumere la funzione d'onda un solo valore, le funzioni $F_{\mathrm{p}}(\varphi)$, che si ricavano con i diversi valori della costante p , devono essere periodiche rispetto alla variabile φ , con un periodo multiplo di quello associato a $\mathrm{p} = \mathbf{1}$.
La costante p dovrà quindi essere un numero intero :

$$\mathrm{p} = \mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3} ; \ldots\ldots$$

Uguagliando il primo membro dell'equazione alla costante p^2 , se dividiamo per $\mathrm{sen}^2\vartheta$ e separiamo le veriabili ritenendo $\left(\mathrm{E_t} - \mathrm{E_p}\right)$ indipendente da ϑ , otteniamo :

$$\frac{1}{R\left(\mathrm{r}\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathrm{r}}\left(\mathrm{r}^2 \cdot \frac{\partial R\left(\mathrm{r}\right)}{\partial \mathrm{r}}\right) + \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{h}^2} \cdot \mathrm{r}^2 \cdot \left(\mathrm{E_t} - \mathrm{E_p}\right) =$$

$$= - \frac{1}{T(\vartheta) \cdot \mathbf{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\mathbf{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial T(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right) + \frac{\mathrm{p}^2}{\mathbf{sen}^2\vartheta}$$

il primo membro dipende solo da r ed il secondo solo da ϑ e quindi devono entrambi essere uguali a una costante, che indichiamo con $\mathrm{l} \cdot \left(\mathrm{l} + \mathbf{1}\right)$ con $\mathrm{l} = \mathbf{0} ; \mathbf{1} ; \mathbf{2} ; \mathbf{3} ; \mathbf{4}$;....... in modo da avere al secondo membro l'equazione di Legendre associata al parametro p, diversamente l'equazione non potrebbe ammettere soluzioni periodiche con periodo uguale a $\left(\mathbf{2} \cdot \pi\right)$.
Abbiamo quindi :

$$\frac{1}{\mathbf{sen}\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\mathbf{sen}\vartheta \cdot \frac{\partial T(\vartheta)}{\partial \vartheta}\right) + \left[l \cdot \left(\mathrm{l} + \mathbf{1}\right) - \frac{\mathrm{p}^2}{\mathbf{sen}^2\vartheta} \right] \cdot T(\vartheta) = \mathbf{0}$$

Per $\mathrm{p} \neq \mathbf{0}$ le soluzioni sono le **funzioni associate di Legendre**, che sono polinomi del tipo :

$$P_{\mathrm{l}}^{\mathrm{p}}(\vartheta) = \mathrm{sen}^{\mathrm{p}}\vartheta \cdot \frac{d^{\mathrm{p}}}{d\left(\cos\vartheta\right)^{\mathrm{p}}} \cdot P_{\mathrm{l}}\left(\cos\vartheta\right)$$

Uguagliando il primo membro a $\mathrm{l} \cdot \left(\mathrm{l} + \mathbf{1}\right)$ e sostituendo l'espressione della energia potenziale :

2254p

$$E_p = -\frac{K_s^2 \cdot m}{r} = -\frac{\left(10^{-7} \cdot C_l^2\right)^2 \cdot Z \cdot q_e^2}{r}$$

si ottiene l'equazione di Laguerre :

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{\partial R}{\partial r}\right) + \frac{8 \cdot \pi^2 \cdot m}{h^2} \cdot \left(E_t + \frac{K_s^2 \cdot m}{r}\right) \cdot R - \frac{l \cdot (l+1) \cdot R}{r^2} = 0$$

Le soluzioni di questa equazione sono date da :

$$R_{nl}(r) = \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}\right)^3 \cdot \frac{(n-l-1)!}{\left(2 \cdot n \cdot (n+l)!\right)^3}} \cdot e^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot \alpha^l \cdot P_{n+l}^{2 \cdot l+1}(\alpha)$$

dove $P_{n+l}^{2 \cdot l+1}(\alpha)$ sono i polinomi di Laguerre dati da :

$$P_{n+l}^{2 \cdot l+1}(\alpha) = \frac{d^{2 \cdot l+1}}{d\alpha^{2 \cdot l+1}}\left(e^{\alpha} \cdot \frac{d^{n+l}}{d\alpha^{n+l}}\left(\alpha^{n+l} \cdot e^{-\alpha}\right)\right)$$

con la variabile α legata al raggio r dalla relazione :

$$\alpha = \frac{\left(8 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot Z \cdot q_e^2\right)}{(4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0)\left(n \cdot h^2\right)} \cdot r = \frac{\left(8 \cdot \pi^2 \cdot K_s^2 \cdot m^2\right)}{\left(n \cdot h^2\right)} \cdot r$$

Le soluzioni di Laguerre richiedono che l'energia E della particella assuma solo i valori legati al parametro n dalla relazione :

$$E_n = -\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{Z \cdot q_e^2}{2 \cdot \varepsilon_0 \cdot h \cdot n}\right)^2 = -\frac{m}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot K_s^2 \cdot m}{h \cdot n}\right)^2$$

2254q