

**– Analisi critica dell'equazione di Schrodinger, applicazione al nucleo atomico e significato della funzione d'onda**

Se l'equazione di Schrodinger deve descrivere **un sistema fisico reale**, le costanti di separazione che abbiamo introdotto nell' Art. 33.1 per giungere a una soluzione devono essere tali da portare a funzioni che possano avere **un significato fisico**, qualunque esso sia, **esse devono quindi essere, finite, continue e ad un solo valore**. Questo risultato si può ottenere solo con le condizioni :

$$n = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots ; \quad ; \quad l \leq (n - 1) \quad ; \quad |p| \leq l$$

**La massa m può dunque assumere solo posizioni associate a valori di energia che variano per quantità finite**, passando da un valore di n al successivo. L'energia totale vale :

$$\begin{aligned} E = E_c + E_p &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - \frac{K_s^2 \cdot m}{r} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K_s^2}{r} - \frac{K_s^2 \cdot m}{r} = - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K_s^2}{r} \end{aligned}$$

e quindi, sostituendo si ha :

$$- \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K_s^2}{r} = - \frac{m}{2} \cdot \left( \frac{2 \cdot \pi \cdot K_s^2 \cdot m}{h \cdot n} \right)^2$$

da cui si ricava :

$$r_n = \frac{h^2}{K_s^2 \cdot (2 \cdot \pi \cdot m)^2} \cdot n^2$$

e quindi anche :

$$E = - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{K_s^2}{r} = - \frac{1}{2} \cdot m^3 \cdot \frac{(K_s^2 \cdot 2 \cdot \pi)^2}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

**Se si assume h come costante universale, queste relazioni ci dicono che il raggio della traiettoria è inversamente proporzionale al quadrato**

**della massa considerata e l'energia totale direttamente proporzionale al cubo della massa.**

Il primo risultato è in assoluto **disaccordo** con l'osservazione sperimentale e con i risultati teorici ottenuti per altre vie, dai quali risulta che, con una massa generatrice dello spazio rotante molto più elevata di quella in moto sull'orbita, il raggio dell'orbita non dipende dalla massa presente.

Per quanto riguarda la seconda relazione, osserviamo che l'energia totale in valore assoluto è uguale all'energia cinetica (in condizione di equilibrio).

La dipendenza dal cubo della massa  $m$  risulta dunque in **disaccordo** con la stessa definizione di energia cinetica.

**Le due relazioni risultano quindi fisicamente inaccettabili.**

Del resto, la stessa contraddizione si osserva nell'equazione della lunghezza d'onda di De Broglie **applicata al moto orbitale** di una massa in uno spazio rotante. Si hanno infatti le due ipotesi :

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot V} \quad ; \quad 2 \cdot \pi \cdot r_n = n \cdot \lambda \quad \text{ossia : } \lambda = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot n$$

La prima relazione indica una lunghezza d'onda inversamente proporzionale alla massa, mentre la seconda fornisce una lunghezza d'onda associata alla massa indipendente dal suo valore e dipendente solo dall'orbita sulla quale essa si muove. Chiaramente non possono essere vere entrambe.

L'unica maniera per recuperare l'indipendenza del raggio nel primo caso, la proporzionalità diretta nel secondo e la coincidenza delle due ultime relazioni è quella di "**considerare  $h$  direttamente proporzionale alla massa**".

**Sostituiamo quindi la costante di Planck con l'espressione generale che abbiamo già ricavato :**

$$H = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot V_1 \cdot r_1$$

che si riduce alla costante di Planck  $h$  quando la massa in orbita è l'elettrone e quindi con  $m = m_e$ .

Quindi, sostituendo, si ottiene :

$$r_n = \frac{V_1^2 \cdot r_1^2}{K_s^2} \cdot n^2$$

e sostituendo ancora  $K_s^2 = V_1^2 \cdot r_1$  si ha in definitiva :  $r_n = r_1 \cdot n^2$

**2254s**

con la stessa sostituzione l'energia risulta :

$$E_n = - \frac{m \cdot K_s^2}{2 \cdot r_1} \cdot \frac{1}{n^2} = - E_1 \cdot \frac{1}{n^2}$$

coincidente con il risultato ottenuto nella teoria generale degli spazi rotanti è confermato dall'osservazione astronomica.

Sostituendo  $H$  al posto di  $h$ , nell'espressione di De Broglie, anche in questo caso le due relazioni coincidono. Si ha infatti :

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot V} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m \cdot V_1 \cdot r_1}{m \cdot V} = \frac{2 \cdot \pi \cdot V_1 \cdot r_1}{V} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot n$$

Per esempio, le orbite **circolari** minime stabili del sistema Solare risultano :

$$R_n = 6.151 \cdot 10^6 K_m \cdot n^2$$

e quindi, per la Terra, con  $n_T = 5$ , si ricava l'energia di legame :

$$R_T = \frac{R_5}{(1 - e^2)} = \frac{6.151 \cdot 10^6 K_m \cdot 5^2}{(1 - 0.016719^2)} = 153.818 \cdot 10^6 K_m$$

$$E_T = - \frac{m_T \cdot K_s^2}{r_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot n^2} \cdot (1 - e^2) = -2.58 \cdot 10^{33} \text{ j}$$

In buon accordo con il valore :  $E_T = - \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot V_T^2 = -2.60 \cdot 10^{33} \text{ j}$

Per Mercurio, con  $n_{Me} = 3$ , si ottiene :

$$R_{Me} = \frac{R_3}{(1 - e^2)} = \frac{6.151 \cdot 10^6 K_m \cdot 3^2}{(1 - 0.2056^2)} = 57.802 \cdot 10^6 K_m$$

$$E_{Me} = - \frac{m \cdot K_s^2}{r_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot n^2} \cdot (1 - e^2) = -3.791 \cdot 10^{32} \text{ j}$$

2254t

In ottimo accordo con il valore :  $E_{Me} = - \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{Me}^2 = -3.783 \cdot 10^{32} \text{ j}$

Per il pianeta più lontano, Plutone, con  $n_{Pl} = 30$  , si ricava :

$$R_{Pl} = \frac{R_{30}}{(1 - e^2)} = \frac{6.151 \cdot 10^6 \text{ Km} \cdot 30^2}{(1 - 0.24881^2)} = 5901.2 \cdot 10^6 \text{ Km}$$

$$E_{Pl} = - \frac{m_{Pl} \cdot K_s^2}{r_1} \cdot \frac{1}{2 \cdot n^2} \cdot (1 - e^2) = -1.468 \cdot 10^{29} \text{ j}$$

In ottimo accordo con il valore :  $E_{Pl} = - \frac{1}{2} \cdot m_{Pl} \cdot V_{Pl}^2 = -1.470 \cdot 10^{29} \text{ j}$

Se si vuole associare alla Terra o a qualsiasi altra massa in moto equilibrato sulla stessa orbita( anche  $m \rightarrow 0$  ), una lunghezza d'onda, si dovrà avere :

$$\lambda_T = \frac{H_s}{m_T \cdot V_T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m_T \cdot V_1 \cdot r_1}{m_T \cdot V_T} = 2 \cdot \pi \cdot r_1 \cdot n_T = 193.239 \cdot 10^6 \text{ Km}$$

Le stesse relazioni possono essere utilizzate per il nucleo atomico.

Supponiamo, per esempio di voler estrarre un neutrone dal nucleo  $U_{92}^{242}$  per trasformarlo in  $U_{92}^{241}$ .

Dal paragrafo P.189 della tavola periodica dei nuclidi, si ricava la seguente configurazione dei livelli nucleari.

$\frac{1817.50}{1817.0}$	$U_{92}^{241}$	$\frac{241.05981}{241.06033}$	<b>92n</b>	2+0	8+0	18+0	4+14	1+23	1+20	1+0	$\frac{1.900M}{\beta^- 5m}$
$\frac{1822.85}{1822.7}$	$U_{92}^{242}$	$\frac{242.06273}{242.06293}$	<b>92n</b>	2+0	8+0	18+0	4+14	1+23	1+20	0+1	$\frac{1.200M}{\beta^- 16.8m}$

La configurazione dell'  $U_{92}^{242}$  mette in evidenza che la trasformazione si potrà realizzare solo con la **scissione del deutone** presente sul settimo livello **7** e

**2254u**

successiva espulsione del neutrone, lasciando il protone in equilibrio sulla stessa orbita.

L'energia di legame di un protone sul livello fondamentale vale :

$$E_1(92) = \frac{\frac{3}{8} \cdot m_p \cdot K_s^2(92)}{2 \cdot r_1(92)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot m_p \cdot K_p^2 \cdot Z}{2 \cdot R_{11P} \cdot Z^{\frac{1}{3}}} = 175.279 \text{ MeV}$$

L'energia di estrazione di un neutrone dal settimo livello sarà :

$$E_7(92) = E_1(92) \cdot \frac{1}{7^2} = 3.577 \text{ MeV}$$

Aggiungendo l'energia necessaria per scindere il deutone, **l'energia totale richiesta per estrarre il neutrone** risulta :

$$E_{n7}(92) = E_7(92) + 2.2246 \text{ MeV} = 5.8016 \text{ MeV}$$

Il valore sperimentale risulta **5.6 MeV**.

Utilizzando il valore corretto dell'energia per livello pubblicata nel paragrafo P.97.1, risulta :

$$E_{n7}(92) = E_0(92) \cdot \frac{1}{2 \cdot 7^2} + 2.2246 \text{ MeV} = 5.3508 \text{ MeV}$$

entrambi i risultati teorici sono in buon accordo con il valore sperimentale.

Se invece vogliamo estrarre un neutrone dall'isotopo  $U_{92}^{234}$ , la configurazione dei livelli nucleari ci dice che i deutoni meno legati si trovano sul sesto livello

$\frac{1772.46}{1771.7}$	$U_{92}^{233}$	$\frac{233.03884}{233.039635}$	<b>92n</b>	2+0	8+0	18+0	14+9	0+25	1+15	0+0	$\frac{2.100M}{ce}$
											20.9m
$\frac{1778.94}{1778.6}$	$U_{92}^{234}$	$\frac{234.04055}{234.040952}$	<b>92n</b>	2+0	8+0	18+0	14+9	0+25	0+16	0+0	$\frac{4.8598M}{\alpha 2.455 \cdot 10^{-5} a}$
											0.0054%

e quindi l'energia necessaria per estrarre un neutrone sarà :

$$E_{n7}(92) = E_0(92) \cdot \frac{1}{2 \cdot 6^2} + 2.2246 \text{ MeV} = 6.4796 \text{ MeV}$$

e con la relazione approssimata :

**2254v**

$$E_7(92) = E_1(92) \cdot \frac{1}{6^2} + 2.2246 \text{ MeV} = 7.0934 \text{ MeV}$$

entrambi i valori sono in accordo con quello sperimentale di **6.8447 MeV**.

Si deve notare che **la quantizzazione del raggio orbitale è indipendente dalla massa e dunque ha carattere di legge universale**, mentre la quantizzazione dell'energia è legata alla massa in orbita e quindi è legata allo spazio rotante considerato.

Con le relazioni che abbiamo ricavato e gli esempi che abbiamo riportato, si rende possibile una discussione dell'equazione di Schrodinger **senza alcun riferimento al mondo atomico o subatomico**.

Non solo, ma si deve anche riconsiderare la costante di Planck fin dall'origine.

Essa è stata introdotta come costante di proporzionalità fra l'energia emessa durante la transizione di una massa planetaria  $m$  da un livello di energia  $E_{n1}$  ad un altro associato a un valore di energia  $E_{n2} < E_{n1}$  e la frequenza **della radiazione emessa sottoforma di fotone**, secondo la relazione :

$$E_{12} = E_{n1} - E_{n2} = H \cdot \nu_{12}$$

L'energia totale della massa  $m_1$  in equilibrio sull'orbita, in valore assoluto, è uguale alla sua energia cinetica e quindi si ha :

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_n^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_n \cdot V_n = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_n \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_n}{T_n} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_n \cdot \nu_n = 2 \cdot \pi \cdot m_1 \cdot \frac{V_1}{n} \cdot R_1 \cdot n^2 \cdot \frac{\nu_n}{2} \end{aligned}$$

Ricordando che, per qualsiasi spazio rotante la frequenza orbitale vale :

$$\nu_n = \frac{\nu_1}{n^3}, \text{ sostituendo, si ottiene :}$$

$$E_n = 2 \cdot \pi \cdot m_1 \cdot V_1 \cdot R_1 \cdot \frac{\nu_1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

**2254w**

Applichiamo inizialmente la relazione a **un sistema elementare**, formato da un protone centrale o comunque una massa che genera uno **spazio rotante**  $K_p^2$  uguale a quello del protone e una sola massa in orbita  $m_e$  uguale a quella dell'elettrone. Si avrà :

$$E_n(1) = \left( 2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e} \right) \cdot \left( \frac{V_{1e}}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

Se ora poniamo nel centro  $Z$  protoni (o masse equivalenti) e sulle orbite un ugual numero di elettroni, avremo uno spazio rotante e tutte le caratteristiche orbitali modificate secondo le relazioni :

$$K_s^2(Z) = Z \cdot K_p^2 \quad ; \quad V_1(Z) = V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad R_1(Z) = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

$$v_1(Z) = \frac{V_1(Z)}{2 \cdot \pi \cdot R_1(Z)} = v_{1e}$$

Che verificano l'equazione fondamentale :  $V_1^2(Z) \cdot R_1(Z) = K_s^2(Z)$

L'energia totale **di un elettrone** sul livello  $n$ -esimo sarà :

$$E_n(Z) = \left( 2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e} \right) \cdot \left( Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{V_{1e}}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \right)$$

La prima parentesi non dipende dal numero atomico  $Z$  e quindi, **per tutta la materia ordinaria, formata da atomi**, rappresenta un fattore di valore costante.

Essendo l'atomo il componente fondamentale di tutta la materia ordinaria, se consideriamo solo la fascia elettronica dell'atomo, possiamo porre :

$$\left( 2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e} \right) = h_e = \text{costante} \quad (\text{per la fascia degli elettroni})$$

E' chiaro che, essendo l'atomo diffuso in tutto l'universo, **se si considerano solo le transizioni degli elettroni**,  $h_e$  assume il valore di costante universale.

L'espressione dell'energia di legame dell'elettrone sull'orbita  $n$ -esima sarà :

**2254x**

$$E_n(Z) = h_e \cdot \left( Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{v_{1e}}{2} \cdot \frac{1}{n^2} \right) = h_e \cdot v_n(Z)$$

Se l'**elettrone** si sposta dal livello  $N_1$  al livello  $N_2$ , la frequenza " **del fotone emesso** " risulta :

$$v_{12e}(Z) = Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{v_{1e}}{2} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

e quindi la sua energia sarà :  $E_{12e}(Z) = h_e \cdot v_{12e}(Z)$

**E'da tenere presente che  $E_{12e}(Z)$  rappresenta l'energia associata alla transizione di un solo elettrone.**

Consideriamo ora due elettroni che, si spostano dal livello  $N_1$  al livello  $N_2$  in maniera del tutto indipendente, nei tempi e nella direzione in cui si verifica la transizione. **Verranno emessi due fotoni**, in tempi e direzioni indipendenti, di energia  $E_{12e}(Z) = h_e \cdot v_{12e}(Z)$  e frequenza  $v_{12e}(Z)$ .

L'energia complessivamente emessa sarà :

$$E_{12-2e}(Z) = 2 \cdot [h_e \cdot v_{12e}(Z)]$$

Più in generale, se gli elettroni indipendenti che migrano sono  $N_e$  avremo :

$$E_{12-N_e}(Z) = N_e \cdot [h_e \cdot v_{12e}(Z)]$$

dove il primo fattore indica il numero di fotoni emessi e il secondo l'energia e la frequenza di ciascuno di essi.

Supponiamo adesso che gli  $N_e$  elettroni realizzino la transizione nello stesso istante e nella stessa direzione, come se formassero un aggregato compatto.

Dato che nel sistema nulla è cambiato, l'energia emessa sarà ancora quella del caso precedente, data dalla relazione :  $E_{12-N_e}(Z) = N_e \cdot h_e \cdot v_{12e}(Z)$

Avremo quindi un fascio molto compatto (teoricamente sovrapposti) formato da  $N_e$  fotoni perfettamente coerenti, **assolutamente indistinguibili**, aventi frequenza  $v_{12e}(Z)$ .

2254y



**Il fattore di proporzionalità fra la frequenza e l'energia totale associata al fascio vale :**

$$H = N_e \cdot h_e.$$

Immaginiamo ora di lasciare invariata la massa centrale che genera lo spazio rotante e di sostituire gli elettroni presenti sulle orbite con masse tutte uguali tra loro di valore :

$$m_1 = N_e \cdot m_e .$$

In definitiva abbiamo una massa centrale che genera uno **spazio rotante di valore :**

$$K_s^2(Z) = Z \cdot K_p^2$$

sulle cui orbite si muovono in equilibrio le masse elementari  $m_1$  .

Le caratteristiche dell'orbita fondamentale del sistema con le masse  $m_1$  in orbita risultano :

$$R_1(Z) = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} = \frac{2 \cdot m_e}{m_1} \cdot R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

$$V_1(Z) = V_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{m_1}{2 \cdot m_e}} \cdot V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

$$v_1(Z) = v_{1e} \cdot \left( \frac{m_1}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

si ha quindi :

$$H_1 = (2 \cdot \pi \cdot m_1 \cdot V_{11} \cdot R_{11})$$

Se consideriamo, per esempio il nucleo atomico, si ricava :

$$\begin{aligned} H_1 &= (2 \cdot \pi \cdot m_1 \cdot V_{11} \cdot R_{11}) = \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot m_p \cdot V_{11} \cdot R_{11} \right) = \\ &= \left( 2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{4} \cdot m_p \cdot V_{11e} \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot R_{11e} \cdot \frac{2 \cdot m_e}{m_p} \right) = \end{aligned}$$

2254z

$$= \frac{3}{2} \cdot h_e \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Se una sola massa  $m_1$  si sposta dal livello  $n_1$  al livello  $n_2$ , senza nessuna modifica possiamo ripetere il discorso che abbiamo già fatto per l'elettrone. L'energia associata **all'unico fotone emesso** sarà :

$$E_{12N}(Z) = H_1 \cdot \left[ \frac{v_{1e}}{2} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{m_1}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \right]$$

La frequenza della radiazione emessa risulta quindi :

$$v_{12N}(Z) = \frac{v_{1e}}{2} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{m_1}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Se consideriamo il nucleo atomico, con  $m_1 = m_p$ , si avrà :

$$v_{12N}(Z) = \frac{v_{1e}}{2} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

$$H_1 = \frac{3}{2} \cdot h_e \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Il valore dell'energia del fotone emesso con **la transizione di un protone**, si può anche scrivere :

$$E_{12N}(Z) = \frac{3}{2} \cdot h_e \cdot \frac{v_{1e}}{2} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^2 \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

sostituendo i valori numerici si ottiene :

**2254z1**

$$E_{12N}(Z) = 17.2016 \text{ MeV} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

coincidente con il risultato ottenuto per altra via.

Le espressioni che abbiamo ottenuto ci dicono che **la frequenza del fotone dipende sia dalla massa generatrice, che ha subito la transizione che dallo spazio rotante centrale**  $K_s^2 = Z \cdot K_p^2$ .

**La costante di proporzionalità  $H_1$  tra la frequenza e l'energia del fotone è invece indipendente dallo spazio rotante e dipende solo dalla massa che subisce la transizione.**

Per definire l'energia di un fotone non è quindi sufficiente conoscere il valore della frequenza, ma è necessario conoscere anche la massa  $m_1$  che lo ha generato, per poter calcolare la costante  $H$ .

Quando la relazione venne proposta da Planck, gli spettri ai quali poteva fare riferimento erano **solo quelli associati a transizioni di elettroni** nell'atomo e quindi  $h$  assumeva realmente valore di costante universale, in quanto non si poneva il problema di individuare la massa generatrice del fotone.

Se però si considera **un fotone emesso dal nucleo atomico** in seguito a **una transizione di un protone tra due livelli nucleari**, per il calcolo di  $H$  è necessario tenere conto del rapporto tra la massa del protone e quella dello elettrone. Si ha quindi :

$$H_p = \frac{3}{2} \cdot h_e \cdot \left( \frac{m_p}{2 \cdot m_e} \right)^{\frac{1}{2}} = 45.44966282 \cdot h$$

Riprendiamo ora la funzione d'onda vista nell'Art.33.1, nella forma completa :

$$\psi(r; \varphi; \vartheta; t) = R_{nl}(r; n; l) \cdot F_p(\varphi; p) \cdot T(\vartheta; p; l) \cdot \text{sen}(\omega \cdot t)$$

Affinchè possa avere tutte le caratteristiche matematiche e fisiche richieste ad una funzione d'onda per poter rappresentare un processo fisico reale, la  $\psi(r; \varphi; \vartheta; t)$  deve soddisfare tutte **le condizioni** imposte dall'insieme dei parametri indipendenti  $(n; l; p)$ , che vengono detti "**numeri quantici**" :

**2254z2**

$$n = 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots \quad ; \quad |p| \leq l \leq (n - 1)$$

Ogni **terna di autovalori**, individua quindi una diversa funzione d'onda, detta **autofunzione**,  $\psi_{n,l,p}(\mathbf{r}; \varphi; \mathcal{G}; \mathbf{t})$ , che si associa alla massa  $m$  descritta come onda.

Se quindi si fissano i valori delle variabili  $r_0, \varphi_0, \mathcal{G}_0, t_0$ , che individuano perfettamente il punto dello spazio fisico e l'istante, non si ha una funzione precisa  $\psi_0(r_0; \varphi_0; \mathcal{G}_0; t_0)$  associata alla massa  $m$ , come ci si aspetterebbe, ma una serie di funzioni, ciascuna associata a una terna di **numeri quantici**.

Una massa **non puntiforme** può ruotare anche su se stessa, aggiungendo così un momento angolare al quale si associa un momento magnetico di spin, che può essere concorde o discorde con quello orbitale e questa condizione viene indicata con un altro numero quantico  $p_s$ .

In definitiva si hanno quindi quattro numeri quantici che definiscono "**lo stato quantico**" della massa considerata con la funzione  $\psi_{n,l,p,p_s}(\mathbf{r}; \varphi; \mathcal{G}; \mathbf{t})$ .

Se in ogni punto dello spazio  $P_0(r_0; \varphi_0; \mathcal{G}_0)$  alla massa considerata come onda si associano infiniti valori  $\psi_{n,l,p,p_s}(r_0; \varphi_0; \mathcal{G}_0)$ , si deve capire che significato può avere ciascun valore e tutto l'insieme dei valori di  $\psi(P_0)$ .

La funzione d'onda sarà espressa da :

$$\psi_{n,p,l,p_s}(r_0; \varphi_0; \mathcal{G}_0) = F_p(\varphi_0; p) \cdot T_{p,l}(\mathcal{G}_0; p; l) \cdot R_{nl}(r_0; n; l)$$

Dato che, per ciascuna funzione componente  $F_p(\varphi_0; p)$ ,  $T_{p,l}(\mathcal{G}_0; p; l)$ ,  $R_{nl}(r_0; n; l)$ , ad ogni valore del numero quantico si associa un valore della funzione, **ad un valore della variabile** è associato un insieme di valori della corrispondente funzione.

Non esiste quindi una corrispondenza biunivoca tra variabile e funzione, ma solo tra il valore della variabile e l'insieme delle autofunzioni, associate ciascuna al corrispondente autovalore.

La domanda che, a questo punto, ci poniamo è :

**2254z3**

Se a un angolo  $\varphi_0$  corrispondono più componenti  $F_p(\varphi_0; \mathbf{p})$ , dal punto di vista fisico, che significato ha il valore  $\varphi_0$  della variabile  $\varphi$  e dei diversi valori  $F_p(\varphi_0; \mathbf{p})$  ad esso associati ?

Naturalmente, la stessa domanda ci poniamo per le altre variabili e dunque per tutta la funzione d'onda  $\psi_{n,p,l,p_s}(\mathbf{r}_0; \varphi_0; \mathcal{G}_0)$ .

Essendo l'equazione di Schrodinger un "oggetto" puramente matematico, le soluzioni che ammette non danno una risposta solo al nostro problema, ma a tutti quelli che impongono le stesse condizioni.

Le condizioni che sono state poste per risolvere l'equazione non hanno fatto riferimento a un problema specifico, **ma hanno carattere assolutamente generale** e quindi tale potrà essere anche la loro interpretazione.

Non esiste quindi un discorso logico che possa portare a una interpretazione corretta della funzione d'onda. Se ne ipotizza una, coerente con il problema che si sta trattando, e si procede poi alla verifica sperimentale.

Come abbiamo visto, l'equazione di Schrodinger è stata scritta senza alcun riferimento a casi particolari e quindi la soluzione si potrà riferire a qualsiasi massa in moto in uno spazio rotante.

Una massa che, nella descrizione corpuscolare è rappresentata dal punto P perfettamente individuato dalle componenti  $(\mathbf{r}; \varphi; \mathcal{G}; \mathbf{t})$ , nella descrizione ondulatoria data dalla funzione d'onda di Schrodinger allo stesso valore della componente spaziale, **corrispondono diversi stati possibili della massa** e dunque si perde la possibilità di localizzarla attraverso la soluzione fornita dell'equazione.

D'altra parte, proprio per la natura dell'equazione, le soluzioni sono in genere funzioni complesse, quindi difficilmente interpretabili fisicamente.

A questo punto, per recuperare l'informazione sulla posizione della particella attraverso la funzione d'onda, Max Born osservò che un fotone, che presenta comportamento ondulatorio, si trova in una condizione assolutamente analoga a quella della nostra massa.

La differenza fondamentale tra i due casi sta nel fatto che **il fotone**, anche se viene interpretato come un "pacchetto d'onde", si muove nello spazio con una

**2254z4**

velocità costante e quindi **può essere descritto da una funzione reale** che soddisfa l'equazione delle onde di d'Alembert, l'onda elettromagnetica.

Per la particella materiale, dovendo verificare l'equazione di Hamilton, si ha una velocità dipendente dallo spazio e questo, porta a soluzioni complesse dell'equazione di d'Alembert, senza un chiaro significato fisico.

Max Born superò questo problema osservando che il quadrato dell'ampiezza dell'onda elettromagnetica valutata in un volume elementare fornisce il valore dell'energia trasferita dall'unità di volume.

Integrando in tutto lo spazio, si ottiene dunque il valore dell'energia associata e trasferita complessivamente dall'onda. Se si tratta di un fotone, l'ampiezza dell'onda è diversa da zero solo nello spazio "**occupato dal pacchetto**" e **quindi l'integrale fornisce l'energia associata e trasferita dal fotone**. Si può dire che l'integrale del quadrato della funzione d'onda localizza il fotone.

Per fare un discorso analogo su una funzione d'onda complessa, ricordiamo che il quadrato del modulo si ottiene come prodotto delle funzioni coniugate e quindi è solo questo che potrà assumere un significato fisico.

Max Born, basandosi solo su un'analogia, dunque più o meno arbitrariamente interpreta il prodotto :

$$\psi(P; t) \cdot \psi^*(P; t) = |\psi(P; t)|^2$$

come **probabilità per unità di volume** che la massa  $M$  occupi il punto  $P$ .

Assunto quindi un volume elementare  $dV$  intorno a  $P$ , il contributo elementare  $dP$  che questo volume dà alla probabilità  $P$  che in tutto lo spazio  $V$  la massa esiste sarà :

$$dP = |\psi(P; t)|^2 \cdot dV$$

Affinché si possa dare questa interpretazione, è necessario che **la funzione d'onda sia normalizzata**, ossia deve essere verificata la condizione che la massa è presente da qualche parte nell'universo con probabilità uguale a **1**. Si deve dunque avere :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(P; t)|^2 \cdot dV = 1$$

Con riferimento al moto su un'orbita, l'insieme dei numeri quantici associati alla funzione d'onda consentono di localizzare la particella **non in un punto**,

**2254z5**

ma in tutti gli stati possibili, con una certa probabilità.

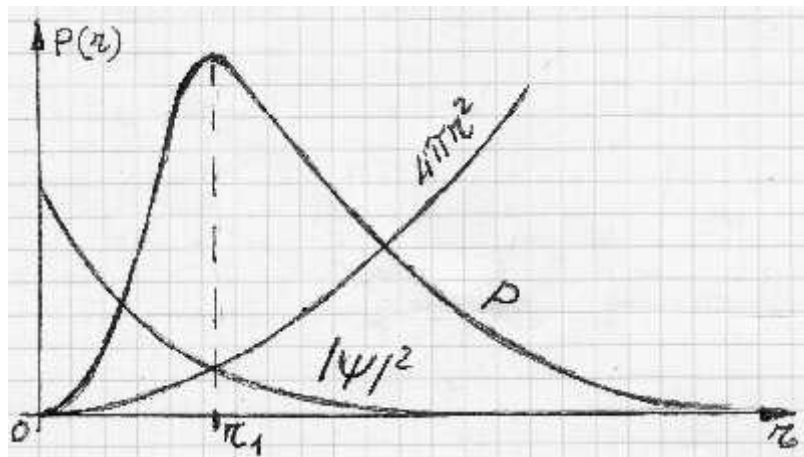
Si dice che **tutti questi stati individuano un orbitale** all'interno del quale la probabilità di trovare la particella assume il valore massimo in prossimità del raggio dell'orbita calcolato considerando un **comportamento della massa di tipo corpuscolare**.

Se, per esempio, si considera l'atomo di idrogeno, con un protone al centro della sfera entro la quale si trova l'elettrone, il volume elementare sarà uguale a  $dV = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$ .

risulta quindi :  $dP = |\psi(P;t)|^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$

integrando si ottiene la probabilità  $P(r)$  di trovare l'elettrone entro il raggio  $r$

$$P(r) = \int_0^r |\psi(P;t)|^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$$



Ponendo :  $\frac{dP}{dr} = |\psi(P;t)|^2 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = 0$

si ricava il punto in corrispondenza del quale risulta massima la probabilità di trovare l'elettrone, che risulta coincidente con il raggio di Bohr.

A tale proposito osserviamo che la curva della probabilità  $P(r)$  **in funzione del raggio  $r$  non è simmetrica** rispetto al valore  $r_1$  e quindi, se la teoria degli orbitali e l'interpretazione probabilistica sono corrette, dal diagramma si vede

2254z6

che il valore medio del raggio risulta più elevato del valore più probabile  $r_1$  e questo dovrebbe essere verificabile considerando un numero molto elevato di atomi.

L'opportunità di effettuare questa verifica ci viene offerta dal Sole, che si può considerare una sfera di idrogeno con atomi perfettamente a contatto fra loro.

Se indichiamo con  $A_s$  il numero di atomi di massa  $m_H$  presenti nel Sole, si potrà scrivere :

$$m_s = A_s \cdot m_H = A_s \cdot \delta_H \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_H^3$$

$$m_s = \delta_s \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_s^3$$

uguagliando le due espressioni si ha :

$$r_s = r_H \cdot \left( \frac{\delta_H}{\delta_s} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot A_s^{\frac{1}{3}}$$

essendo, per ipotesi, le sfere a contatto tra loro, sarà :

$$\frac{\delta_H}{\delta_s} = \frac{(2 \cdot r_H)^3}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_H^3} = \frac{6}{\pi}$$

sostituendo, si ottiene il valore di  $A_s$  e quindi si ricava la massa :

$$m_s = \frac{\pi}{6} \cdot \left( \frac{r_s}{r_H} \right)^3 \cdot m_H$$

essendo noti dall'osservazione astronomica :

$$r_s = 695843 K_m ; m_s = 1.989085 \cdot 10^{-30} K_g ; A_s = \frac{m_s}{m_H} = 1.1885536 \cdot 10^{57}$$

sostituendo, si ricava :

**2254z7**



$$r_H = \frac{r_s}{\frac{\pi}{6} \cdot A_s^{\frac{1}{3}}} = 5.2946577 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

considerando anche la sfera planetaria dell'elettrone, il raggio dell'orbita sarà

$$R_{11e} = \frac{r_H}{1 + \frac{m_e}{m_p}} = 5.2917757 \cdot 10^{-11} \text{m}$$

perfettamente coincidente con il valore teorico  $r_1$ .

Il risultato che abbiamo ottenuto ci dice che su  $10^{57}$  atomi di idrogeno non si verifica uno spostamento apprezzabile del raggio dal valore  $r_1$  e dunque la curva della probabilità che abbiamo tracciato **non può essere corretta**.

A questo punto osserviamo che **l'onda non è una realtà fisica**, ma solo uno strumento matematico per descrivere una grandezza perturbata che si sposta nello spazio.

Se lo spazio è vuoto, la grandezza perturbata coincide con una caratteristica dello spazio stesso. L'equazione d'onda **viene associata ad essa** e l'onda si sposta con la velocità massima, **caratteristica propria dello spazio**.

Si deve tenere presente che la perturbazione di un equilibrio avrà una durata nel tempo uguale a quella della causa che la genera.

Per esempio, applicando per un tempo indefinito un generatore di tensione alternata ad un'antenna trasmittente, si genera un'onda elettromagnetica che si propaga con continuità in tutto tutto lo spazio circostante e quindi essa sarà presente in qualsiasi punto dello spazio.

Se invece il generatore è attivo solo per un tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , è chiaro che la perturbazione ha inizio nell'istante  $t_1$  e termina nell'istante  $t_2$ .

Se  $V$  è la velocità con la quale la perturbazione si propaga, lo spazio in cui essa si manifesterà sarà solo:  $\Delta r = V \cdot \Delta t = V \cdot (t_2 - t_1)$ .

Questo tratto di spazio perturbato dopo un tempo  $t$  si sarà allontanato dalla

2254z8

origine e diventerà rilevabile nel punto  $r = V \cdot t$ .

La causa più comune di perturbazione dello spazio fisico è la presenza di una massa in moto sull'orbita con un eccesso di energia  $\Delta E$  rispetto al valore di equilibrio (**che vale zero per una particella libera**).

In questo caso il sistema si riporta all'equilibrio attraverso due meccanismi : con un lento e continuo trasferimento di energia allo spazio circostante, fino ad esaurire tutto l'eccesso  $\Delta E$ , oppure con l'emissione nello spazio di tutta l'energia  $\Delta E$  con un solo evento.

Con riferimento alla fascia elettronica dell'atomo, in questo secondo caso si produrrà una perturbazione che inizia con la "caduta" dell'elettrone e termina quando esso ha raggiunto l'equilibrio sull'orbita stabile, dunque con la durata di un periodo orbitale medio  $T_e$ .

Dato che il **fotone emesso** si propaga con la velocità della luce  $C_1$ , la sua estensione nello spazio sarà :  $\Delta r = C_1 \cdot T_e$ .

La frequenza della perturbazione vale :  $\nu = \frac{\Delta E}{h}$  e quindi :  $\lambda = \frac{C_1}{\nu}$

Il numero di impulsi che formano il pacchetto d'onda sarà quindi :

$$N = \frac{\Delta r}{\lambda} = \frac{C_1 \cdot T_e}{C_1} \cdot \frac{\Delta E}{h} = T_e \cdot \frac{E_{11e}}{h} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

Sostituendo il valore medio del periodo orbitale :

$$T_e = \frac{T_{n1} + T_{n2}}{2} = T_{11e} \frac{n_1^3 + n_2^3}{2}$$

si ottiene :

$$N = \frac{n_1^3 + n_2^3}{2} \cdot \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

A differenza dell'onda elettromagnetica, in questo caso la perturbazione è a carattere impulsivo, di durata molto breve, per esempio, con  $n_1 = n_2 + 1$ , si ottiene  $2 < N < 3$ .

L'interpretazione della funzione d'onda  $|\psi(P; t)|^2 = \frac{dP}{dv}$  come densità

di probabilità, esaminata per la componente radiale di  $\psi(r; \varphi; \vartheta; t)$ , deve essere applicata a tutto l'angolo solido che, nella funzione d'onda è espresso dalle componenti  $F(\varphi; t)$  e  $T(\vartheta; t)$ , che si propagano nel tempo come la componente radiale.

Anche per queste componenti la durata della perturbazione  $\Delta t$  sarà uguale al tempo che necessita all'elettrone per passare dal livello  $N_1$  al livello  $N_2$  che, come abbiamo visto, è uguale al periodo orbitale medio  $T_e$ .

Per la definizione stessa di periodo, nel tempo  $T_e$  gli angoli  $\varphi$  e  $\vartheta$  variano di  $2 \cdot \pi$  e quindi le due funzioni  $F(\varphi; t)$  e  $T(\vartheta; t)$  saranno non nulle in tutto l'angolo solido individuato da  $\Delta\varphi = \Delta\vartheta = 2 \cdot \pi$ .

Questo vuol dire che il fotone emesso, quando viene intercettato alla distanza  $r$  dall'origine si manifesta contemporaneamente, con grandezze associate di valore non nullo, **in tutti i punti** della superficie  $4 \cdot \pi \cdot r^2$ .

Il volume di spazio fisico perturbato dalla presenza del fotone e descritto dalla funzione d'onda con  $\psi(r; \varphi; \vartheta; t) \neq 0$  sarà quindi:  $\Delta v = 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \Delta r$ . Su tutto questo volume si dovrebbero distribuire l'energia e l'impulso forniti al fotone nel punto di origine.

L'osservazione sperimentale ci dice però che questo non si verifica. Quando in un punto dello spazio viene assorbito un fotone, esso trasferisce in un solo atto tutta l'energia e l'impulso che aveva in origine.

Il contrasto viene eliminato se si dice che  $F(\varphi; t)$  e  $T(\vartheta; t)$ , al pari della componente radiale di  $\psi(r; \varphi; \vartheta; t)$ , non rappresentano grandezze fisiche associate al fotone, ma solo **la probabilità** che esso possa trovarsi nel punto  $P(r; \varphi; \vartheta; t)$ . Con questa interpretazione nascono però altri problemi, che vedremo in seguito.

**2254z10**

L'equazione di Schrödinger viene ricavata dalla equazione di d'Alembert che si applica a " **qualsiasi perturbazione sinusoidale, che si propaga nello spazio con velocità  $V$  caratteristica del mezzo , e periodo imposto dall'azione che genera la perturbazione** ".

Ricordiamo che l'interpretazione probabilistica della funzione d'onda si rese necessaria soprattutto per giustificare il comportamento di fotoni ed elettroni quando passano attraverso fenditure o fori di dimensioni confrontabili con la lunghezza d'onda.

Le figure di interferenza che si ottengono sembrerebbero richiedere infatti un comportamento di tipo ondulatorio, mentre invece in altri esperimenti, come, per esempio, nell'effetto fotoelettrico, il comportamento sembrerebbe di tipo corpuscolare senza alcun dubbio.

Noi abbiamo però dimostrato, nell' Art. 32 , che, utilizzando i risultati ottenuti nel paragrafo P.29.2 , anche le particelle deviate possono produrre figure di diffrazione generate dalla quantizzazione del raggio orbitale atomico, diverse naturalmente da quelle legate a processi ondulatori.

Ricordiamo brevemente i risultati dell'esperimento della doppia fenditura, per mettere in evidenza alcuni punti non del tutto chiari.

– con fessura **A** aperta e fessura **B** chiusa, inviando una sola particella alla volta, sullo schermo vengono visualizzati i singoli impatti che, **mediati su un lungo periodo**, producono la classica distribuzione a campana, posizionata di fronte alla fessura.

– con fessura **B** aperta e fessura **A** chiusa il processo è del tutto analogo e la figura che si produce è la stessa.

– Supponiamo ora di avere le due fessure a una distanza fra loro tale da non sovrapporre, nemmeno in parte, le figure ottenute sullo schermo e di ripetere l'esperimento inviando le stesse particelle, con lo stesso ritmo e per lo stesso tempo, con entrambe le fenditure aperte.

Naturalmente, la particella che nel primo esperimento aveva attraversato la fessura **A** , quando la **B** era chiusa, continuerà a farlo nella stessa maniera, senza alcuna consapevolezza del fatto che la fessura **B** adesso è aperta. La stessa situazione si presenta per le particelle che passavano attraverso la

fessura **B** durante la seconda prova.

Avremo quindi le stesse figure separate e le particelle avranno conservato il comportamento della prima prova, corpuscolare oppure ondulatorio e anche la nostra descrizione del processo potrà essere la stessa.

Supponiamo ora di ripetere più volte l'esperimento con le due fessure aperte riducendo gradualmente la loro distanza.

E' ragionevole pensare che le particelle, prive di libero arbitrio e senza alcuna consapevolezza dell'accostamento delle fessure, **conservano lo stesso comportamento durante tutto l'esperimento, indipendentemente dalla distanza tra le fessure.**

Il risultato atteso da questa prova è dunque una sovrapposizione delle figure prodotte sullo schermo in modo da avere una distribuzione continua dei punti d'impatto.

Quello che si verifica è invece la comparsa delle tipiche frange di interferenza e **questo come risultato sperimentale è inopinabile.**

Per giustificare questo impreveduto risultato, è necessario analizzare il sistema nelle diverse condizioni sperimentali, per studiare gli effetti prodotti da tutte le differenze rilevate.

Tralasciando le prove con una sola fessura aperta, consideriamo solo l'ultima prova, iniziando con le fessure alla distanza che produce sullo schermo **le due immagini distinte, senza alcuna sovrapposizione.**

In queste condizioni possiamo considerare due sistemi **identici**, che operano alla stessa maniera, indipendentemente uno dall'altro.

La meccanica quantistica, con l'interpretazione **probabilistica** della funzione d'onda associata alle particelle, ci dice che, nel momento in cui, osservando un punto della figura A, riusciamo a stabilire che la particella che l'ha prodotto è passata **certamente** attraverso la fessura **A**, la funzione d'onda "collassa" e la particella **manifesta un comportamento corpuscolare.**

In termini più comprensibili anche a coloro che non conoscono la meccanica quantistica, possiamo dire che il comportamento della particella è sempre lo stesso, indipendente dalle nostre teorie.

Tuttavia, quando non riusciamo a localizzare "**la particella**" nello spazio con una precisione tale da consentire una descrizione come corpuscolo, secondo

Schrodinger **possiamo descrivere** la particella non individuabile attraverso l'**onda associata**, il cui valore ci indica **la probabilità di trovarla** in un certo punto dello spazio.

Quando invece è possibile affermare che in **uno spazio molto piccolo** si ha probabilità **uguale a uno**, dunque la certezza, di trovare la particella, diventa priva di significato la descrizione come onda e **siamo obbligati** a descriverla come corpuscolo.

**Non è dunque la funzione d'onda che collassa, ma la nostra capacità di utilizzare questo strumento per interpretare un risultato**, che non può dipendere dallo strumento che utilizziamo per descrivere la particella.

L'osservazione sperimentale dice che sia le due figure singole che le frange di interferenza si formano comunque, anche se l'invio delle particelle avviene con un ritmo estremamente ridotto, per esempio una al minuto.

Quello che definisce le figure è il numero totale delle particelle che incidono lo schermo. Se il ritmo è elevato le figure si presentano subito. Se invece è lento bisogna attendere per un tempo più lungo.

La figura si forma dunque come risultato statistico di impatti memorizzati nei punti dello schermo.

Supponiamo ora di inviare sulle fessure una particella al minuto e di disporre di un otturatore, che chiude alternativamente una fessura alla volta, lasciando sempre solo una aperta.

Se l'otturatore è **sincronizzato** con la sorgente, sapendo qual'era la fessura aperta quando è stata inviata la prima particella, a seconda che  $N$  sia pari o dispari, possiamo sapere da quale fessura è passata la particella  $N$ -esima, in quanto le dispari che raggiungono lo schermo passano tutte dalla fessura attraversata dalla prima e le pari dall'altra.

La differenza fra la prova senza o con otturatore sta nel fatto che nel primo caso il numero delle particelle che giungono sullo schermo sono il doppio di quelle che vi arrivano in presenza di otturatore, in quanto mediamente esso blocca il **50%** delle particelle su entrambe le fessure, senza alcuna distinzione.

Il buonsenso direbbe quindi che, con un tempo di esposizione doppio, sullo schermo si dovrebbe riprodurre la stessa immagine, ossia le frange.

La meccanica quantistica ci dice però che la presenza dell'otturatore, per il

solo fatto che ci consente di conoscere il percorso delle particelle, provoca il collasso della funzione d'onda, attivando il comportamento corpuscolare, con conseguente impossibilità di formazione delle frange.

Se ora **ripetiamo** l'esperimento nelle stesse condizioni, ossia con otturatore sincronizzato, **ma senza nessuna informazione sulla fessura aperta con la prima particella**, non abbiamo nessun elemento per risalire al percorso delle particelle e questo, sempre secondo la meccanica quantistica, ripristina il comportamento di tipo ondulatorio.

E' da sottolineare che in questo caso è sufficiente solo l'informazione iniziale **per cambiare il comportamento di tutte le particelle, per tutta la durata della prova, senza esercitare nessuna azione fisica su di esse.**

La meccanica quantistica si spinge oltre, dicendo che, se solo si dispone di un lettore capace di fornire l'informazione iniziale, non è necessario leggerlo. **La sola presenza è sufficiente per eliminare le frange presenti.**

La spiegazione del processo che normalmente viene proposta, in sintesi è la seguente.

La sorgente emette le particelle con un' indeterminazione della direzione dello stesso ordine di grandezza della distanza **d** tra le fessure.

Questa indeterminazione è **uguale all'errore** che possiamo commettere nel prevedere la traiettoria seguita dalla particella. In termini probabilistici si può dire che abbiamo la stessa probabilità di trovarla in un punto qualsiasi di un cerchio di diametro **d**.

Quando vediamo che la particella è giunta sullo schermo, non possiamo dire quale fessura ha attraversato, ma solo che è passata attraverso una delle due con la stessa probabilità del **50%** .

Il buonsenso e **la indivisibilità, per definizione, delle particelle elementari** direbbe, a questo punto, che, se la particella osservata sullo schermo è una sola, **esiste una probabilità del 100%** che essa abbia attraversato una sola delle fessure, ed una probabilità del **50%** che sia la **A** oppure la **B**.

creando una ingiustificata anisotropia nel piano perpendicolare al moto delle particelle prima delle fessure, la meccanica quantistica afferma che esiste la probabilità del **50%** che la particella in arrivo attraversi la fessura **A** o la **B** ,

**trascurando completamente tutte le altre direzioni** ugualmente probabili.

Si deve infatti specificare se il fronte dell'onda associata alla particella deve intendersi localizzato in una piccola sezione oppure distribuito come un'onda piana su tutta la sezione del cerchio. E' chiaro che il comportamento di una particella nello spazio prima delle fessure non può ritenersi determinato dalla distanza tra le fessure o comunque **dalle condizioni future**, che si potranno verificare nello spazio oltre le fessure.

Infatti, a questo punto la teoria ondulatoria continua dicendo che, per produrre le frange di interferenza, **è necessario** che l'onda attraversi le due fenditure **contemporaneamente**.

Essendo però l'onda associata alla particella orientata in una sola direzione e non piana o sferica, per poter ottenere questo risultato, si dice che **essa si divide in due unità uguali**, sfruttando il fatto che ha una probabilità del **50%** di attraversare ciascuna delle due fenditure.

Dato che le figure d'interferenza si presentano anche se le fessure vengono fatte ruotare rispetto alla sorgente e la particella ha, lungo tutto il percorso, la possibilità di muoversi in tutte le direzioni entro un cilindro di diametro **d**, non esiste nessuna ragione teorica per la quale la divisione dovrebbe verificarsi nelle due direzioni delle fessure e non in tutte le altre ugualmente probabili.

Il volume entro il quale dovrebbe distribuirsi l'energia della particella sarebbe  $\Delta v = \pi \cdot d^2 \cdot \Delta r$ , **in contrasto con l'effetto fotoelettrico**, che richiede un volume perturbato dalla presenza del fotone comparabile **con le dimensioni dell'elettrone**.

Tralasciamo l'analisi critica di questa operazione e diciamo solo che essa è in totale disaccordo con la definizione stessa di probabilità, in quanto il valore della probabilità che un evento si verifichi **non indica affatto la frazione di evento che si realizza su uno solo possibile, ma il numero di quelli che si realizzano su un numero molto elevato di eventi possibili**.

Un altro punto da chiarire è il meccanismo attraverso il quale si realizza sullo schermo **l'interferenza costruttiva** fra due funzioni d'onda per ricostruire la probabilità del **100%** oppure **quella distruttiva** per avere probabilità uguale a **0%** di trovare la particella nel punto **P** dello schermo.

Dato che il punto **P** dello schermo non è in moto rispetto alle fessure, la sua



posizione è perfettamente determinata entro gli errori strumentali.

Un istante prima e un istante dopo l'impatto della "semi-particella/semi-onda" con il punto  $P$ , " **la sua posizione è definita** " e questo provoca, secondo la stessa teoria ondulatoria, il collasso della funzione d'onda.

Questo vuol dire che, proprio secondo la meccanica ondulatoria, l'impatto su uno schermo fisso si può realizzare solo con comportamento corpuscolare e non ondulatorio.

Diventa così difficile pensare al " **collasso della funzione d'onda in una semi-particella** " e ancor più all'interferenza distruttiva tra due semiparticelle con la verifica di tutti i principi di conservazione .

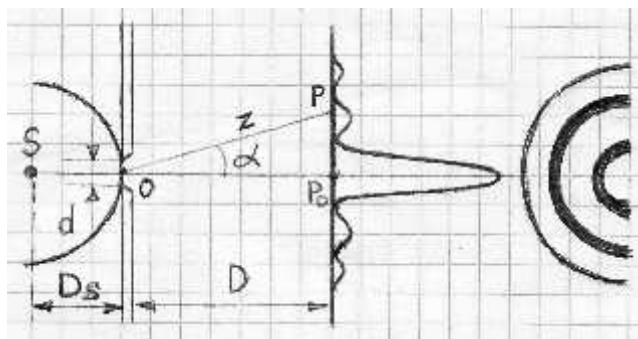
Si deve ancora osservare che, se l'onda associata alla semiparticella passa attraverso la fessura come tale, non subisce solo una deviazione. Secondo il principio di Huygens si produce infatti una diffrazione con distribuzione della energia su tutto il fronte.

Nei punti in cui si ha interferenza costruttiva non si ha quindi l'energia iniziale della particella, ma una piccola parte.

Se le frange si formano **per interferenza di ogni singola onda** (sdoppiata) **con se stessa**, come possiamo conciliare i massimi e i minimi con i principi di conservazione?

Dato che la formazione delle frange di interferenza **è un fatto sperimentale non opinabile**, è necessario cercare una giustificazione teorica alternativa oppure chiarire questi punti.

La via non può che essere quella di riconsiderare i fatti sperimentali, primi fra tutti quelli che **interessano fotoni ed elettroni**, come la loro deviazione da parte di spazi rotanti e l'effetto fotoelettrico.



2254z16

E' anche necessario tenere presente che è provato dall'esperienza che un fotone è indivisibile ; nasce e viene assorbito con un solo atto e **da solo**, se passa in prossimità di uno spigolo non produce le frange di diffrazione che si manifestano con il gran numero di fotoni che formano un raggio.

Con riferimento alla figura, supponiamo che la sorgente emetta una particella alla volta in direzione del punto  $P_0$  e che il foro abbia diametro  $d$  regolabile, inizialmente di dimensioni ordinarie.

In queste condizioni, tutte le particelle incidono nel punto  $P_0$  e non si verifica nessun effetto particolare.

Se riduciamo gradualmente il diametro del foro, man mano che ci si avvicina alle dimensioni atomiche, le particelle tendono a deviare dal punto  $P_0$  in una maniera apparentemente casuale in rapporto all'indeterminazione del punto di partenza, definito con un errore pari al diametro del foro.

In base a questa prova possiamo **certamente** affermare che la deviazione è prodotta dall'interazione della particella con il materiale che riveste il foro, la quale diventa sensibile con l'avvicinarsi della particella al bordo del foro. Per verifica, si può accostare la direzione di moto della particella ad uno spigolo qualsiasi e si ottiene lo stesso risultato.

Si tenga presente che la deviazione prodotta è rilevante. Il fotone che, con lo spazio rotante solare subisce una deviazione data da :

$$\delta_s = \frac{4 \cdot K_s^2}{C_1^2 \cdot r_s} \cdot \left( \frac{360}{2 \cdot \pi} \cdot 3600 \right) = 1,7506 \text{ "}$$

dall'elettrone viene deviato di un angolo molto più elevato :

$$\delta_e = \frac{4 \cdot K_e^2}{C_1^2 \cdot r_{pe}} \cdot \left( \frac{360}{2 \cdot \pi} \cdot 3600 \right) = 43,9455 \text{ "}$$

Registrando un numero di impatti molto elevato, l'esperienza dimostra che la simmetria del sistema porta nel tempo alla formazione di anelli perfettamente centrati su  $P_0$ .

Possiamo dunque dire che la formazione degli anelli rappresenta **il risultato statistico** di un processo ripetuto su un gran numero di particelle.

Altro fatto sperimentale rilevante è che, se le particelle inviate dalla sorgente sono fotoni, cambiando il materiale che riveste il foro, la configurazione degli

anelli non cambia.

Se invece le particelle sono, per esempio, elettroni, cambiando il materiale, cambia anche la configurazione degli anelli prodotti.

In entrambi i casi si tratta, apparentemente, di una interazione tra particella e atomo, intuitivamente dipendente dal tipo di atomo.

Trattando la deviazione della luce nel paragrafo P.29.2 abbiamo visto che la deviazione imposta alla particella dallo spazio rotante **è indipendente dalla massa**, per cui, se una particella viene obbligata ad attraversare una fessura di larghezza paragonabile con le dimensioni atomiche, subirà un'azione del tutto simile a quella che si manifesta su un raggio di luce quando attraversa la stessa fessura ( Art. 32 ).

La differenza di comportamento rilevata tra fotone ed elettrone deve dunque risiedere nel fatto che l'interazione nei due casi si ha con spazi rotanti diversi.

I fotoni interagiscono con lo spazio rotante associato agli elettroni periferici, **che sono presenti in tutti gli atomi**.

Gli elettroni interagiscono invece con lo spazio rotante generato dal nucleo e quindi la sua azione dipende dal numero atomico ( Art. 32 ).

L'analogia con i noti fenomeni associati al moto delle onde e l'indipendenza dai materiali intercettati, nel caso dei fotoni favoriscono l'interpretazione del loro comportamento come onde.

Naturalmente, degli esperimenti che confermano questo comportamento si può dare una doppia lettura.

Se si analizzano i risultati utilizzando l'equazione delle onde, si dirà che tutta la materia presenta un comportamento ondulatorio come la luce. Se invece i risultati sperimentali **degli stessi esperimenti** vengono analizzati utilizzando i principi della meccanica classica, si dirà che la luce ha un comportamento corpuscolare come tutta la materia.

E' chiaro che il comportamento delle parti in gioco nell'esperimento **è unico**, nè ondulatorio nè corpuscolare, ma solo in accordo con la teoria applicata.

Per esempio, nell'articolo 32, abbiamo visto che gli elettroni vengono deviati con formazione di frange sullo schermo **e questo rappresenta il risultato dell'esperimento**.

La giustificazione teorica può essere data, **con la stessa validità**, sia con

un'analisi ondulatoria che corpuscolare.

Se invece di una fessura o uno spigolo abbiamo una superficie piana formata da una distribuzione di atomi disposti su più strati sovrapposti e inviamo una particella, che può essere un elettrone oppure un fotone, l'interazione non può che essere quella che abbiamo già visto.

Naturalmente, essendo cambiata la geometria del sistema, cambiano anche i percorsi e quindi potranno non essere rilevabili le deviazioni, che comunque si verificano.

Bisogna infatti considerare che alla prima deviazione, dovuta all'interazione con il primo strato di atomi, segue l'interazione con il secondo strato, poi con il terzo e così via, fino all'esaurimento dell'energia disponibile.

Se le particelle inviate sono fotoni, l'esperienza dimostra che, aumentando il valore dell'energia, fuori dallo schermo non si ha nessun effetto rilevabile fino a quando non viene raggiunto **un valore di soglia  $E_s$**  in corrispondenza del quale viene emesso dalla superficie un elettrone.

Sperimentalmente si osserva che, **per il superamento del valore di soglia a nulla serve aumentare il numero di fotoni di energia minore.**

**Questo vuol dire che l'interazione di un fotone di energia maggiore o uguale al valore di soglia ha una natura diversa da quella associata a quelli con energia minore. L'emissione dell'elettrone è quindi prodotta da un solo tipo d'interazione.**

Se le particelle inviate sullo schermo sono elettroni, come abbiamo già visto nell' Art. 32, con energia uguale a zero si ha una riflessione totale ( siamo in uno spazio conservativo ) con ritorno dell'elettrone al punto di partenza.

Aumentando gradualmente l'energia, si ha una deviazione sempre minore, fino a quando, raggiunto il valore di soglia  $E_s$ , viene assorbito l'elettrone con espulsione dalla superficie di un fotone di energia uguale a  $E_s$  .

Anche in questo caso **per superare del valore di soglia, a nulla serve un aumento del numero di elettroni con energia iniziale minore.**

**Ancora una volta, questo indica che l'emissione del fotone è prodotta da un solo tipo d'interazione che si verifica solo con energie maggiori del valore di soglia.**

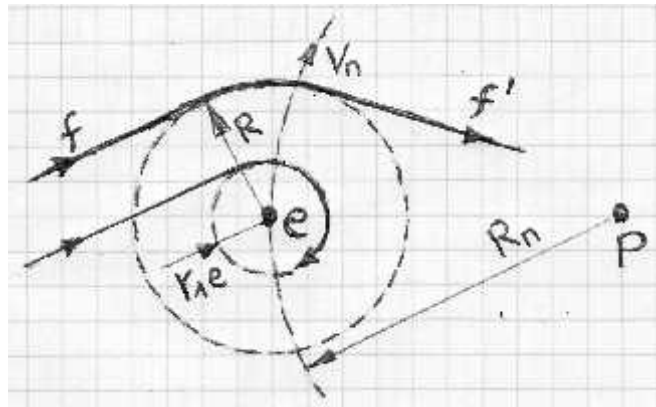
2254z19

Il dettaglio di questi processi si spiega bene con la teoria degli spazi rotanti, che utilizza il comportamento di tipo corpuscolare delle particelle. E' invece spiegabile con qualche difficoltà, se si fa uso della meccanica ondulatoria.

Studiando l'effetto Compton, nel paragrafo P.29.3 , abbiamo visto che, se si invia sullo schermo un fotone avente un valore di energia basso, a seconda del punto d'impatto, esso può subire una deviazione da parte degli elettroni presenti alla periferia dell'atomo, oppure può essere assorbito se l'impatto si

verifica in prossimità della prima orbita raggiungibile , di raggio  $r_{1e} = \frac{K_e^2}{C_l^2}$

sulla quale la velocità di equilibrio coincide con quella della luce.



In figura è stato rappresentato un atomo con un protone che genera lo spazio rotante centrale ed un elettrone  $e$  in equilibrio sull'orbita di raggio  $R_n$  con una energia di legame  $E_n$  .

Se il fotone  $f$  incide sull'atomo alla distanza  $R$  dall'elettrone, viene deviato in direzione  $f'$  per andare a produrre impatti con altri atomi fino ad esaurire tutta l'energia.

In questo caso l'energia iniziale del fotone viene dissipata nello schermo con successive deviazioni, come energia termica, senza produrre nessun effetto esterno particolare.

Se il fotone interagisce con lo spazio rotante dell'elettrone in prossimità della sua orbita minima di raggio  $r_{1e} = 1.534698522 \cdot 10^{-18}m$  , sulla quale si ha una velocità di equilibrio uguale a quella della luce (coincidente dunque con la sua velocità di propagazione) **trova sull'orbita una condizione di equilibrio e**

**quindi viene acquisito dall'elettrone**, con tutta la sua energia  $E_f$ .

L'elettrone, che prima era in equilibrio sull'orbita, si trova ora con un eccesso di energia, rispetto alla condizione di equilibrio, e, come abbiamo visto nello Art. 24.2, trattando la stabilità dei sistemi legati, si muove su un'orbita ellittica

con eccentricità  $e = \sqrt{\frac{E_f}{E_n}}$ .

Anche in questo caso, con  $E_f < E_n$ , l'energia del fotone viene trasformata in energia termica nello schermo, senza nessun effetto esterno.

Se però l'energia del fotone incidente aumenta fino ad avere  $E_f \geq E_n$ , la eccentricità dell'orbita diventa  $e \geq 1$ , **l'energia dell'elettrone sull'orbita** risulta  $E \geq 2 \cdot E_n$  con una velocità maggiore del valore di fuga  $V_f = \sqrt{2} \cdot V_n$  e quindi l'elettrone si allontana dal nucleo, percorrendo un'orbita parabolica, ed esce dalla superficie dello schermo.

Quello che, in definitiva, si osserva dall'esterno è che quando il fotone supera l'energia di soglia  $E_n$ , cede, **in un solo atto**, la sua energia all'elettrone che viene emesso.

In una prova d'interferenza il valore di soglia potrà essere superato solo nei punti in cui si verifica interferenza costruttiva.

In definitiva, possiamo dire che, per una spiegazione completa del processo di interferenza tra fotoni è necessario considerare la diffrazione dei fotoni da parte degli elettroni con un'analisi di tipo corpuscolare, seguita dalla **vera e propria interferenza tra fotoni sullo schermo, condotta con un'analisi di tipo ondulatorio** e infine con un'analisi corpuscolare si deve considerare l'effetto fotoelettrico che consente la formazione delle figure sullo schermo.