– **Teoria della fissione nucleare spontanea e indotta**, **calcolo teorico dell'enegia liberata**.

Trattando la teoria dell'emissione α, abbiamo visto che i nuclei atomici che hanno $Z \geq \mathbf{38}$ hanno una naturale tendenza a trasferire spontaneamente dei neutroni attivi dal centro al terzo livello con liberazione di energia.
Questo processo si verifica fino a quando viene raggiunta una condizione di equilibrio, che impedisce al trasferimento di continuare.

L'energia fornita dal trasferimento di un neutrone attivo dal centro sul livello p può essere calcolata teoricamente differenziando l'espressione dell'energia di legame che abbiamo ricavato :

$$E_{ZN} = E_0(Z) \cdot \alpha(N) + E_D \cdot I$$

si ha quindi :

$$\Delta E_{ZN} = \Delta E_0(Z) \cdot \alpha(N) + E_0(Z) \cdot \Delta\alpha(N) + E_D \cdot \Delta I$$

confondendo il differenziale con l'incremento finito, **l'energia fornita** risulta :

$$\Delta E_{ZN} = \left[E_0(Z-1) - E_0(Z) \right] \cdot \alpha(N) + E_0(Z-1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2} + E_D$$

Tenendo conto che il primo termine è sempre negativo, la riscriviamo :

$$E_{n0/p} = E_0(Z-1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2} - \left[E_0(Z) - E_0(Z-1) \right] \cdot \alpha(N) + E_D$$

Il primo termine rende conto dell'aumento di una particella legata sul livello p.

Il secondo tiene conto della diminuzione di un neutrone attivo al centro, quindi della diminuzione dello spazio rotante che lega tutte le particelle in orbita.

Il terzo termine giustifica il fatto che un neutrone per poter restare in orbita si deve legare a un protone e l'energia fornita vale $E_D = 2.22457$ MeV .
Questo contributo all'enegia sviluppata dal trasferimento viene però fornito in in un secondo tempo, **quando il neutrone si è già trasferito sull'orbita** e quindi non ha nessun peso nel rendere il trasferimento spontaneo o meno.

La condizione per avere un trasferimento spontaneo risulta quindi :

1818a

$$E_0(Z-1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2} \geq \left[E_0(Z) - E_0(Z-1) \right] \cdot \alpha(N)$$

sostituendo le espressioni approssimate : $E_0(Z) \simeq E_0(1) \cdot Z^{\frac{2}{3}}$

$$\alpha(N) \simeq 2 + \frac{Z^{\left(1 - 6 \cdot 10^{-4} \cdot I\right)}}{23} \quad ; \quad I \simeq \left(\frac{Z}{8} - 1 \right)^{1.7}$$

e ponendo : $\left(1 + \frac{1}{2 \cdot p^2 \cdot \alpha(N)} \right)^{\frac{3}{2}} = \beta(N)$

la condizione per il trasferimento spontaneo diventa : $Z \geq \frac{\beta(N)}{\beta(N) - 1}$

I neutroni attivi che si trasferiscono sul livello p si aggregano e organizzano, con le particelle presenti sulle orbite, uno **spazio rotante satellite** avente un numero atomico Z_s che aumenta man mano che procede il trasferimento dei neutroni attivi dal centro.

Ci troviamo quindi con uno spazio rotante centrale di numero atomico Z_c che diminuisce nel tempo ed uno planetario Z_s che aumenta parallelamente.

Per quanto riguarda invece **il trasferimento di un neutrone dal livello p al centro**, **l'energia liberata** risulta :

$$E_{np/0} = E_{ZN}(Z+1 \,;\, N-1) - E_{ZN}(Z \,;\, N)$$

con qualche semplice passaggio, si ricava :

$$E_{np/0} = \left[E_0(Z+1) - E_0(Z) \right] \cdot \alpha(N) - E_0(Z+1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2}$$

e con le solite sostituzioni, **per il trasferimento spontaneo** si ottiene :

1818b

$$Z \leq \frac{1}{\beta(N) - 1}$$

In definitiva gli intervalli in corrispondenza dei quali non si ha trasferimento di neutroni spontaneamente, e dunque il numero atomico è stabile, sono quelli rappresentati in figura.

$$Z_1 = \frac{\beta(N)}{\beta(N) - 1} \qquad Z_2 = \frac{1}{\beta(N) - 1}$$

Secondo questi risultati, utilizzando per $\beta(N)$ il valore associato al nucleo prossimo alla stabilità, il trasferimento spontaneo dei neutroni attivi dal centro del nucleo **cessa quando si ha** $E_{n0/p} = E_{np/0}$ ossia quando si ha :

$$E_0(Z+1) \cdot \left(\alpha(N) - \frac{1}{2 \cdot p^2} \right) = E_0(Z-1) \cdot \left(\alpha(N) + \frac{1}{2 \cdot p^2} \right)$$

che si verifica quando il nucleo attivo si riduce a $Z_1 =$ **38 neutroni**.

A questo punto osserviamo che, se inizialmente si ha un nucleo $A(Z_0 \,;\, N_0)$ prossimo alla stabilità, il numero isotopico, e quindi dei deutoni in orbita, sarà

$$I_0 = \left(\frac{Z_0}{8} - 1 \right)^{1.7}$$

Con il procedere del trasferimento spontaneo dei neutroni si formeranno due nuclei centrale e planetario, $A_1(Z_1 \,;\, N_1)$ e $A_2(Z_2 \,;\, N_2)$, tali da soddisfare le relazioni :

$$Z_2 + Z_1 = Z_0 \,; \quad I_2 + I_1 = I_0$$

Se R_p è il raggio dell'orbita sulla quale si è organizzato il nucleo satellite A_2,

1818c

possiamo scrivere la forza d’interazione nucleare **con l’espressione della forza unificata**, e quindi avremo :

$$F_{1\text{-}2} = \frac{K_1^2 \cdot m_2}{R_p^2} \quad ; \quad F_{2\text{-}1} = \frac{K_2^2 \cdot m_1}{R_p^2}$$

Ricordando che : $K^2 = \frac{K_p^2}{2} \cdot Z \quad ; \quad m = A \cdot (1 \text{ amu})$

sostituendo si hanno le forze d’interazione nucleare :

$$F_{1\text{-}2} = \frac{K_1^2 \cdot m_2}{R_p^2} = \frac{\left(\frac{K_p^2}{2} \cdot Z_1\right) \cdot A_2 \cdot (1 \text{ amu})}{R_p^2}$$

$$F_{2\text{-}1} = \frac{K_2^2 \cdot m_1}{R_p^2} = \frac{\left(\frac{K_p^2}{2} \cdot Z_2\right) \cdot A_1 \cdot (1 \text{ amu})}{R_p^2}$$

Dovendo essere : $F_{1\text{-}2} = F_{2\text{-}1}$

si ricava la condizione :

$$Z_1 \cdot A_2 = Z_2 \cdot A_1 \quad \text{ovvero :} \quad \frac{I_1}{Z_1} = \frac{I_2}{Z_2}$$

Ricordando che : $Z_2 = Z_0 - Z_1 \; ; \quad I_2 = I_0 - I_1$

si ottiene la condizione : $\frac{Z_0}{I_0} = \frac{Z_1}{I_1} = \frac{Z_2}{I_2}$

Questa espressione è molto importante, **in quanto definisce il rapporto tra**

1818d

le dimensioni dei due nuclei centrale e planetario che si separano con la migrazione dei neutroni attivi centrali.

Fra tutte le soluzioni possibili, la più probabile è quella che rende massima la l'energia di legame tra i nuclei e quindi **l'energia di estrazione** di un nucleo dall'orbita sulla quale è stato sintetizzato, espressa dalla relazione :

$$E_{Z_2 P/\infty} = E_0(Z_1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2} \cdot A_2$$

Per un calcolo approssimato possiamo sostituire le relazioni :

$$E_0(Z_1) \simeq E_0(1) \cdot Z_1^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad A_2 \simeq \frac{Z_2}{2} \quad ; \quad Z_2 = Z_0 - Z_1$$

e quindi abbiamo : $E_{Z_2 P/\infty} \simeq \alpha \cdot Z_1^{\frac{2}{3}} \cdot \left(Z_0 - Z_1\right)$

Derivando e uguagliando a zero, si ottiene : $Z_1 \simeq \frac{2}{5} \cdot Z_0$

Per esempio, per l'uranio, con $Z_0 = \mathbf{92}$, si ha $Z_1 \simeq \mathbf{36.8}$, in buon accordo con il risultato teorico che abbiamo ricavato per altra via e con l'esperimento.

Oltre a questa configurazione asimmetrica, **che risulta la più probabile**, si ha anche la soluzione con due nuclei uguali, che fornisce lo stesso rapporto tra il numero atomico e quello isotopico, dunque è possibile dal punto di vista dell'equilibrio, ma presenta una **minore energia di estrazione**.

In questo caso i due nuclei sono quindi meno legati e il sistema meno stabile. Per esempio, con $Z_0 = \mathbf{100}$ si ha $Z_1 = \mathbf{40}$; $Z_2 = \mathbf{60}$ e si ricava :

$$E_{40P/\infty} \simeq \alpha \cdot Z_1^{\frac{2}{3}} \cdot \left(Z_0 - Z_1\right) = \alpha \cdot \mathbf{701.8}$$

$$E_{50P/\infty} \simeq \alpha \cdot Z_1^{\frac{2}{3}} \cdot \left(Z_0 - Z_1\right) = \alpha \cdot \mathbf{678.6}$$

L'esperienza conferma che la fissione simmetrica ha probabilità di verificarsi mediamente 500 volte minore di quella asimmetrica.

A scopo puramente esplicativo, consideriamo un nucleo reale, per esempio

1818e

l'isotopo Fm^{258}_{100} , che si presenta con la seguente configurazione.

$\frac{1913.38}{1913.7}$ Fm^{258}_{100} $\frac{258.09746}{258.097076}$ 100n 2+0 8+0 18+0 12+10 1+24 1+24 0+0 $\frac{-}{FS\ 370\mu s}$

il numero isotopico vale :

$$I_0 = A_0 - 2 \cdot Z_0 = 58$$

e quindi si ricava : $$\frac{Z_0}{I_0} = \frac{100}{58} = 1.724138$$

La prima coppia di nuclei che forniscono lo stesso rapporto è, ovviamente :

$$Z_1 = Z_2 = \frac{Z_0}{2} \quad \text{con} \quad I_1 = I_2 = \frac{I_0}{2}$$

Allontanandoci gradualmente da questa configurazione **che**, **come abbiamo visto**, **corrisponde a una possibile codizione di equilibrio**, cerchiamo la coppia che meglio approssima il rapporto calcolato :

$$k = \frac{Z_1}{I_1} = \frac{Z_2}{I_2} = \frac{Z_0}{I_0} = 1.724138$$

ipotizzando un valore iniziale $Z_1 = 38$, dovrà essere $I_1 = \frac{Z_1}{k} = 22$

e quindi : $Z_2 = Z_0 - Z_1 = 62$ e risulta : $\frac{Z_2}{I_0 - I_1} = 1.722222$

I valori ottenuti sembrano accettabili. Possiamo tuttavia provare a spostarci di una unità a destra e a sinistra, per verificare se realmente quella calcolata è la soluzione più probabile.

Con $Z_1 = 39$, dovrà essere $I_1 = \frac{Z_1}{k} = 22.62$

assumendo $I_1 = 23$, si ottiene $k_1 = 1.6956$, non accettabile.

Con $Z_1 = 37$, dovrà essere $I_1 = \frac{Z_1}{k} = 21.46$

1818f

assumendo $I_1 = 21$, si ottiene $\mathbf{k_1} = 1.7619$, non accettabile.

Dunque, la coppia di nuclei che si separano nell'isotopo Fm_{100}^{258} come solare e planetario sono :

$\frac{827.730}{827.91}$	Sr_{38}^{98}	$\frac{97.92864}{97.92845}$	38n	2+0	8+0	4+7	1+12	0+2	0+1	1+0	$\frac{5.867M}{\beta^- 653ms}$
$\frac{1303.21}{1303.3}$	Sm_{62}^{160}	$\frac{159.93526}{159.93514}$	62n	2+0	8+0	14+2	0+16	0+15	1+3	1+0	$\frac{2.830M}{\beta^- 9.60s}$

Stabilito che il trasferimento spontaneo dei neutroni centrali si ferma quando il numero atomico del nucleo centrale si riduce a $Z_1 \simeq \mathbf{38}$, con la formazione di un nucleo satellite che ha lo stesso rapporto tra il numero atomico e quello isotopico, vediamo ora qualche dettaglio del processo.

Il trasferimento di un neutrone attivo in orbita comporta però la formazione di un nucleo avente $\left(Z - \mathbf{1}\right)$ neutroni attivi e quindi, **per essere equilibrato**, in orbita dovrà avere $\left(Z - \mathbf{1}\right)$ particelle.

Se il neutrone trasferito si legasse semplicemente a un protone per formare un deutone, lo squilibrio ne provocherebbe immediatamente la scissione per ripristinare la condizione di partenza.

Dunque, **quando giunge sull'orbita** " il neutrone deve legarsi a due particelle " e formare così un solo aggregato.
Le reazioni possibili sono :

$$n_a + H_1^1 \rightarrow H_1^2 + 2.22457\,\text{MeV}$$

a questo punto, con la stessa probabilità, si verificano :

$$H_1^2 + H_1^2 \longrightarrow \begin{cases} \mathbf{H_1^3}\left(1,01\ \text{MeV}\right) + p\left(3,02\ \text{MeV}\right) \\ \mathbf{He_2^3}\left(0,82\ \text{MeV}\right) + n\left(2,45\ \text{MeV}\right) \end{cases}$$

alle quali fanno seguito le :

$$He_2^3 + n \longrightarrow He_2^4 + \gamma\left(20.5776\ \text{MeV}\right)$$

$$H_1^3 + H_1^2 \longrightarrow He_2^4\left(3,52\ \text{MeV}\right) + n\left(14,07\ \text{MeV}\right)$$

1818g

$$He_2^3 + H_1^2 \;\rightarrow\; He_2^4(\mathbf{3,67}\text{ MeV}) + p(\mathbf{14,68}\text{ MeV})$$

$$He_2^3 + He_2^3 \;\rightarrow\; He_2^4(\mathbf{3,67}\text{ MeV}) + \mathbf{2}\cdot p(\mathbf{12,9}\text{MeV})$$

$$H_1^3 + He_2^4 \;\rightarrow\; Li_3^7 + \gamma(\mathbf{2.46762}\text{ MeV})$$

Inizia così una vera e propria serie di fusioni del tutto simile alla nucleosintesi primordiale con la differenza che, **non essendo disponibili neutroni liberi**, nell'universo primordiale la sintesi veniva alimentata dall'idrogeno, **presente quasi come unico elemento**, mentre nel nucleo è alimentata dai neutroni e questo la rende molto più semplice.

Le reazioni nucleari che si verificano sono comunque le stesse e sono rese possibili dal fatto che nel nucleo si ha un'elevata concentrazione di particelle a temperatura molto alta in uno spazio molto piccolo, **coincidenti proprio con le condizioni richieste per realizzare la fusione dei nuclei leggeri**.

Man mano che la migrazione dei neutroni procede, nel nucleo satellite che si forma aumenta il numero dei neutroni attivi (e dunque il numero atomico Z_2). Questo obbliga a un continuo assestamento di tutte le particelle presenti, per giungere alla configurazione associata alla massima stabilità e quindi anche alla massima energia di legame.

Questo assestamento è necessario e si verifica per ogni neutrone che si sposta dal centro.
L'eccesso di energia sviluppata, rispetto al valore richiesto per poter legare il nucleo che si sta formando a quello centrale, **è disponibile come energia di eccitazione del nucleo**, **che aumenta ad ogni trasferimento**.

Nulla cambia nel discorso e nei calcoli se si pensa al trasferimento di tutti gli Z_2 neutroni attivi simultaneamente (o comunque da poterlo considerare tale). In questo caso il processo di assestamento si verifica con un **improvviso ed imponente sviluppo di energia**.

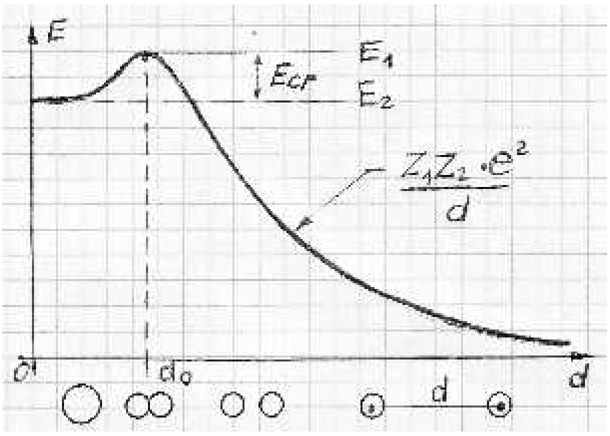
Quando il valore dell'energia di eccitazione è uguale all'energia di legame, **il nucleo satellite raggiunge la velocità di fuga dall'orbita e si allontana con una velocità iniziale uguale a quella di fuga**, **per ridursi a zero alla distanza** $R = \infty$.

In realtà, quando termina la sintesi, le transizioni di assestamento producono

1818h

una quantità di energia che va molto oltre il valore di fuga, per cui il nucleo ha una velocità iniziale maggiore di quella di fuga e quindi la sua energia risulta diversa da zero anche alla distanza $R = \infty$.

Normalmente si ritiene che sia la forza di repulsione a fornire ai nuclei l'energia cinetica che viene liberata dalla fissione.



Ricordiamo in breve la spiegazione corrente del processo, senza discuterla. Con riferimento alla figura, si dice che il nucleo, in condidioni normali, si trovi con una energia E_2 , rispetto a un riferimento arbitrario (oppure rispetto alla condizione corrispondente a $d \to \infty$, se si ritengono i frammenti presenti nel nucleo di partenza fin dall'istante iniziale), in una buca di potenziale che, per essere superata richiede l'energia E_1 **.**

In queste condizioni il nucleo oscillerebbe per un tempo indefinito senza mai superare la barriera.
Se, con qualsiasi mezzo, viene fornita l'energia $E_{cr} = E_1 - E_2$, l'oscillazione viene amplificata fino alla separazione dei nuclei nel punto corrispondente a una distanza tra i centri $d = d_0$.
A questo punto la forza di repulsione coulombiana prevale su quella nucleare e i due frammenti si allontanano, trasformando l'energia potenziale espressa

da $$E_{Z_1 Z_2} = \left(10^{-7} \cdot C_l^2\right) \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot q_e^2}{d}$$

nell'energia cinetica che viene liberata dalla fissione.

Secondo **la teoria della fissione che abbiamo esposto in coerenza con**

1818i

il modello nucleare che abbiamo proposto, come succede per qualsiasi satellite in orbita in uno spazio rotante, quando raggiunge la velocità di fuga, data da $V_f = \sqrt{2} \cdot V_{eq}$, parte con questa velocità iniziale e **decelera sotto l'azione della forza unificata** fino a $V = 0$ alla distanza $R = \infty$.

Secondo questa descrizione, **la fissione nucleare è un processo che evolve con modalità** completamente opposte **a quelle proposte dalle teorie correnti**.
Questo verrà in seguito dimostrato con un calcolo dettagliato delle energie in gioco.

La fissione nucleare è dunque in realtà un processo di fusione e sintesi che **immagazzina l'energia sviluppata** e la rende disponibile quando il nucleo che è stato sintetizzato ha raggiunto la velocità di fuga.

Il fatto che la fissione venga generalmente **attivata dall'assorbimento di un neutrone**, lascia pensare che l'instabilità del nucleo, e quindi **il processo di fissione**, **sia dovuto ad un eccesso di neutroni**.

In realtà, trattando il decadimento α e osservando le tavole dei nuclei isobari e isodiaferi si vede che la fissione rappresenta **un'atrenativa all'emissione** α, **ripetuta più volte**. Dunque i nuclei che potranno avere tendenza a subire la fissione spontanea sono solo **quelli che presentano una carenza nel numero di deutoni in orbita** .

I nuclei che presentano un numero di deutoni in eccesso, per poter subire la fissione, devono prima ridurlo attraverso una o più emissioni β^-.
In base a quello che abbiamo visto, possiamo dire che :

la fissione nucleare non rappresenta un evento improvviso, **che porta un nucleo con un** eccesso di neutroni **a dividersi**, **ma**, **al contrario**, **essa rappresenta un processo evolutivo che si verifica all'interno dei nuclei pesanti** "con carenza di deutoni in orbita", **e si manifesta improvvisamente quando il valore dell'energia fornita dal trasferimento di neutroni attivi centrali verso la periferia supera quella di estrazione del nucleo sintetizzato fino a quel momento**.

Per capire il dettaglio di questo punto cruciale, è necessario tenere presente che in un qualsiasi sistema legato l'instabilità è dovuta a due componenti che sono generalmente indipendenti, ma che nel nucleo atomico "**composto**" lo sono un po' meno.

1818l

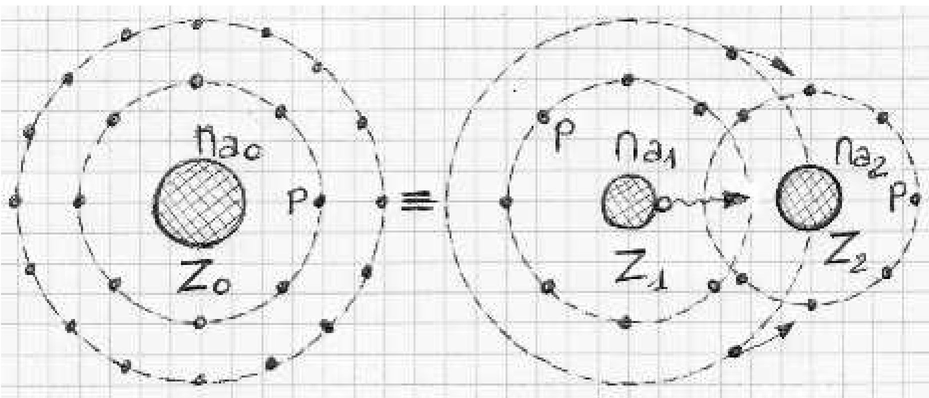
Per riferirci al nostro problema, nel caso di un sistema formato da un nucleo centrale, che genera lo spazio rotante, ed un nucleo satellite che si muove in equilibrio sull'orbita, possiamo avere due tipi di scissione.

La stabilità del legame tra i due nuclei, dunque la loro eventuale scissione, è definita **esclusivamente dalla loro energia di legame**, che nella teoria che abbiamo proposto è espressa dalla relazione $E_{1\text{-}2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_1^2 \cdot m_2}{R}$ o altre equivalenti.

Una seconda instabilità, del tutto indipendente dalla prima, è quella propria di ciascun componente, **definita dal valore dell'energia che è stata liberata durante la sua sintesi**, che **numericamente** è uguale all'energia di legame di tutto l'aggregato.

Se l'aggregato che viene sintetizzato è libero da vincoli, **l'energia che rende disponibile la sintesi viene liberata nello spazio** e, alla fine del processo, l'aggregato manifesta un difetto di massa proporzionale all'energia emessa.

Se invece la sintesi dell'aggregato viene realizzata **all'interno di uno spazio rotante**, **con componenti già legati**, sia l'energia di sintesi che quella che lega l'aggregato allo spazio rotante, non vengono fornite dall'esterno, **ma da uno scambio che si realizza all'interno del sistema iniziale**, tra lo spazio rotante centrale e le parti che vengono spostate per realizzare la sintesi.



Fino a quando non si realizza uno scambio con lo spazio esterno, il sistema iniziale di sinistra e quello di destra, in evoluzione, **sono in ogni momento equivalenti** per un osservatore esterno, in quanto hanno la stessa energia di legame **complessiva** e quindi la stessa massa.

1818m

Tornando al nostro nucleo atomico, se si pensa ad un trasferimento graduale **dei neutroni attivi** sul quarto livello, man mano che **prosegue la sintesi del nucleo sull'orbita si rende disponibile una quantità di energia sempre più elevata**, **che viene ceduta al nucleo in fase di costruzione**.

Essendo però esso legato, non emette questa energia, ma la immagazzina come energia di eccitazione, che, come ben sappiamo, **si manifesta come deformazione delle orbite dei protoni orbitali**.

Il sistema finale si presenta quindi formato da due nuclei A_1 e A_2 di numero atomico Z_1 e Z_2 legati da una energia (detta appunto di legame) $E_{1\text{-}2}$ che può essere uguale al valore associato all'equilibrio sull'orbita circolare R_{eq}

espressa da : $$E_{1\text{-}2eq} = \frac{1}{2} \cdot \frac{K_1^2 \cdot m_2}{R_{er}}$$

oppure eccedente, rispetto a questo valore, della frazione : $\alpha = \dfrac{\Delta E}{E_{1\text{-}2eq}}$

e in questo caso l'orbita diventa ellittica con eccentricità $e = \sqrt{\alpha}$.

Ciascuno dei due nuclei, a sua volta, avrà una propria energia di legame tra la parte attiva dei neutroni centrali e le particelle presenti sulle orbite.
Questa energia è assolutamente indipendente da quella che lega i due nuclei tra loro.

Se il nucleo fosse libero questa energia sarebbe coincidente numericamente con l'energia di sintesi e tutte le particelle si muoverebbero su orbite circolari.
Nel nostro caso però non è così, in quanto durante la sintesi l'energia è stata immagazzinata come energia di eccitazione **che diventa così un eccesso rispetto al valore associato all'equilibrio su orbite circolari**.
Anche in questo caso l'eccitazione si manifesta dunque con il moto su orbite ellittiche delle masse planetarie.

Per la presenza di queste orbite ellittiche, il nucleo, **molto lentamente**, perde energia e dopo un tempo generalmente elevato decade spontaneamente.

Se, come accade per qualsiasi sistema legato, astronomico oppure atomico, se al termine della sintesi l'eccesso di energia ΔE risulta uguale all'energia

1818n

associata all'equilibrio sull'orbita circolare, l'eccentricità e dell'orbita risulta

$$e = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{\Delta E}{E_{1\text{-}2eq}}} = \mathbf{1}$$

Con riferimento al centro dello spazio rotante centrale,l'orbita diventa aperta, parabolica, e il nucleo satellite si allontana definitivamente, per raggiungere una velocità uguale a zero alla distanza $R \to \infty$.

Quando però i nuclei non sono più legati, **quindi subito dopo la scissione**, si liberano dell'energia di sintesi che avevano immagazzinato e, invece di partire con l'energia cinetica iniziale di fuga $E_{if} = \mathbf{2} \cdot E_{1\text{-}2eq}$, partono con un valore di energia cinetica più elevato, comprensiva di quella di eccitazione e quindi, **pur decelerando**, alla distanza $R \to \infty$ giungono con energia uguale a quella di eccitazione e rappresenta il valore dell'energia che viene liberata globalmente dalla fissione.

Se alla fine della sintesi risulta $\alpha = \dfrac{\Delta E}{E_{1\text{-}2eq}} < \mathbf{1}$, **quindi** $\Delta E < E_{1\text{-}2eq}$,

per attivare il processo è necessario fornire, **con qualsiasi mezzo**, **un valore di energia**, **detto di attivazione** : $E_a \geq E_{1\text{-}2eq} - \Delta E$

Si ha quindi il valore minimo, indicato come **valore critico dell**'**energia di attivazione** :

$$E_{cr} = E_{1\text{-}2eq} - \Delta E$$

Se l'energia di attivazione viene fornita dal nucleo stesso, con una transizione interna, si ha la **fissione spontanea**.
Quando invece l'energia viene fornita attraverso un mezzo esterno, si parla di **fissione indotta**.

Per quanto è stato detto, **qualunque sia il sistema legato considerato**, **il calcolo teorico dell**'**energia liberata dalla sua fissione in due unità si presenta concettualmente molto semplice**:

1-**calcolo dell**'**energia di sintesi del nucleo satellite direttamente su una orbita stabile del nucleo iniziale**, **a spese di quest**'**ultimo**, **che è uguale al valore di energia** E_d **disponibile per espellere il nucleo satellite**.

2-calcolo dell'energia di estrazione del nucleo satellite dall'orbita sulla quale è stato sintetizzato, che è uguale all'energia $E_{p/\infty}$ che bisogna spendere per allontanare il nucleo satellite fino alla distanza $R \to \infty$.

3-calcolo dell'energia residua, liberata dalla fissione dopo il definitivo allontanamento, data da $E_F = E_d - E_{p/\infty}$.

Per quanto riguarda il primo calcolo, una notevole semplificazione deriva dal fatto che **operiamo in uno spazio conservativo** e quindi l'energia liberata dall'evoluzione del sistema dipende solo dalla configurazione di partenza e di arrivo, **che sono fisse**.

Quella di partenza è data dal nucleo $A_0(Z_0\ ;\ I_0)$ e quella di arrivo, qualunque sia il percorso teorico scelto per ottenerla, sarà sempre data dai due nuclei $A_1(Z_1\ ;\ I_1)$ e $A_2(Z_2\ ;\ I_2)$ separati alla distanza $R \to \infty$.

Possiamo quindi scegliere **arbitrariamente** il livello sul quale immaginiamo che venga realizzata la sintesi.

Come primo esempio di calcolo, possiamo riprendere l'esempio già citato dell'isotopo

$$\frac{1913.38}{1913.7}\ \mathrm{Fm}_{100}^{258}\ \frac{258.09746}{258.097076}\ \ 100n\ \ 2+0\ \ 8+0\ \ 18+0\ \ 12+10\ \ 1+24\ \ 1+24\ \ 0+0\ \ \frac{-}{FS\ 370\mu s}$$

con fattore di forma :

$$\alpha(158) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{72}} = \mathbf{5.660556}$$

Consideriamo inizialmente la fissione simmetrica.

Dalle tavole si ricava la configurazione dei nuclei generati :

$$\frac{1082.86}{1082.7}\ \mathrm{Sn}_{50}^{129}\ \frac{128.91328}{128.91348}\ \ 50n\ \ 2+0\ \ 8+0\ \ 10+4\ \ 0+16\ \ 0+9\ \ 1+0\ \ 0+0\ \ \frac{4.040M}{\beta^-\ 2.23m}$$

con fattore di forma :

$$\alpha(79) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{72}} = \mathbf{4.373889}$$

1818p

Nell’ Art.36 , trattando la teoria delle forze nucleari, **per il raggio del nucleo atomico abbiamo ricavato l’espressione teorica** :

$$R_p(Z\,;\,p) = 57,63978486 \cdot 10^{-15}\ \text{m} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$$

e, con la correzione dovuta alla presenza dei deutoni :

Il raggio dell’orbita di confine del nucleo vale quindi :

$$R_p(50\,;\,6) = \frac{54.1211 \cdot 10^{-15}\ \text{m}}{1 - \dfrac{|50-18|^{\frac{5}{4}}}{1200}} \cdot 50^{\frac{1}{3}} \cdot 6^2 = 7663.3896 \cdot 10^{-15}\ \text{m}$$

la forza d’interazione nucleare risulta :

$$F_{Sn\text{-}Sn} = \frac{K_1^2 \cdot m_2^*}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{K_p^2}{2} \cdot 50\right) \cdot (129 \cdot 1\ \text{amu})}{R_p^2(50\,;\,6)} = 17.321\ \text{Nw}$$

Per valutare l’energia fornita dal trasferimento dei neutroni, tenendo presente che ciascuno di essi si muove in uno spazio rotante diverso, si dovrebbe fare **la somma di tutti i contributi**, ossia :

$$E_{50\text{-}0/p} = \sum_{100}^{62} \left\{ \left[E_0(Z_n) - E_0(Z_n - 1) \right] \cdot \alpha_{0n} - E_0(Z_n - 1) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2} \right\}$$

Noi non eseguiamo la somma, ma ci limitiamo ad assumere il valore medio tra l’energia fornita dal primo e l’ultimo trasferimento. Per il primo si ha :

$$E_{n0/4} = E_0(99) \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(100) - E_0(99) \right] \cdot \alpha(158) = 3.8195\ \text{MeV}$$

Considerando **uguale a zero** l’energia fornita dall’ultimo neutrone, che porta alla condizione di equilibrio, quella data da **50** trasferimenti risulta :

1818q

$$E_{t50n} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 50 = 95.4875 \text{ MeV}$$

Dopo aver completato il trasferimento dei **50** neutroni attivi e l'assestamento del nucleo sintetizzato, l'energia che si rende disponibile sarà data da quella fornita dal trasferimento più quella fornita dalla sintesi del nucleo satellite, che coincide con l'energia di legame dell'isotopo Sn_{50}^{129} dalla quale bisogna però detrarre l'energia di sintesi dei deutoni orbitali, in quanto **sono stati utilizzati quelli già presenti** nell'isotopo di partenza Fm_{100}^{258} . Si ha dunque :

$$E_d = E_{ZN}(50\,;129) + E_{t50n} - I(50\,;129) \cdot 2.2246 =$$

$$= 1082.86 + 95.4875 - 29 \cdot 2.2246 = 1113.834 \text{ MeV}$$

Per avere il nucleo Sn_{50}^{129} sul **raggio di confine** del nucleo, la configurazione dei livelli ci dice che bisogna spostare129 unità di massa dal quarto livello al sesto e **l'energia che bisogna fornire** vale quindi :

$$E_{Sn4/6} = E_0(50) \cdot 129 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 6^2} \right) = 521.532 \text{ MeV}$$

Per allontanare il nucleo sintetizzato **dall'orbita di confine fino** alla distanza $R = \infty$, in modo che sia indipendente dallo spazio rotante, sarà necessario compiere un lavoro contro la forza nucleare dato da :

$$L_{Sn6/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Sn\text{-}Sn} \cdot R_p(50\,;6) = 414.24 \text{ MeV}$$

L'energia disponibile per l'estrazione, dopo il trasferimento sul confine, vale :

$$E = E_d - E_{Sn4/6} = 592.302 \text{ MeV}$$

L'energia liberata dal processo dopo l'allontanamento dei nuclei sarà :

$$E_{Fm/Sn\text{-}Sn} = E - L_{Sn6/\infty} = 178.062 \text{ MeV}$$

Si noti l'inutilità, ai fini del calcolo, del trasferimento del nucleo satellite sul sesto livello.

1818r

Lo stesso risultato si ottiene calcolando direttamente il lavoro di estrazione dal quarto livello, che vale :

$$E_{Sn4/\infty} = E_0(50) \cdot \mathbf{129} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2 \cdot 4^2}} = \mathbf{938.757}\ \text{MeV}$$

Consideriamo ora la scissione asimmetrica, che porta ai nuclei :

$\frac{827.730}{827.91}$ Sr_{38}^{98} $\frac{97.92864}{97.92845}$ 38n 2+0 8+0 4+7 1+12 0+2 0+1 1+0 $\frac{5.867M}{\beta^- 653ms}$

$$\alpha(60) = \mathbf{3} + \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{32}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{98}} = \mathbf{3.899232}$$

$\frac{1303.21}{1303.3}$ Sm_{62}^{160} $\frac{159.93526}{159.93514}$ 62n 2+0 8+0 14+2 0+16 0+15 1+3 1+0 $\frac{2.830M}{\beta^- 9.60s}$

$$\alpha(98) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{98}} = \mathbf{4.707426}$$

Per quanto riguarda la **distanza di equilibrio** tra i due nuclei, si deve tenere presente che, ai fini del calcolo, **la scelta è ininfluente**, in quanto ci troviamo in uno spazio conservativo. Sciegliamo quindi il raggio dell'orbita di confine.

Dalla tavola periodica dei nuclei atomici vediamo che entrambi i nuclei hanno il settimo livello come confine. I valori dei raggi nucleari risultano dunque :

$$R_{ZP7}(38\,;98) = \mathbf{56.098325 \cdot 10^{-15} \cdot 38^{\frac{1}{3}} \cdot 7^2} = \mathbf{9241.458 \cdot 10^{-15}}\text{m}$$

$$R_{ZP7}(62\,;160) = \mathbf{59.765032 \cdot 10^{-15} \cdot 62^{\frac{1}{3}} \cdot 7^2} = \mathbf{11590.63 \cdot 10^{-15}}\text{m}$$

la forza d'interazione nucleare risulta :

$$F_{Sm\text{-}Sr} = \frac{K_1^2 \cdot m_2^*}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\frac{\mathbf{K_p^2}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{62}\right) \cdot \left(\mathbf{98} \cdot 1\,\text{amu}^*\right)}{R_{ZP7}^2(62\,;160)} = \mathbf{7.13276}\,\text{Nw}$$

1818s

oppure :

$$F_{Sr\text{-}Sm} = \frac{K_2^2 \cdot m_1^*}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\dfrac{K_p^2}{2} \cdot \mathbf{38}\right) \cdot \left(\mathbf{160} \cdot 1\,\text{amu}^*\right)}{R_{ZP7}^2(38\ ;\ 98)} = \mathbf{11.2273}\,\text{Nw}$$

Si tenga presente che le due forze non sono riferite allo stesso sistema, ma a due possibili condizioni di equilibrio, ugualmente probabili.
Si deve infatti considerare lo spazio rotante nucleare, come qualsiasi altro, ha **le orbite stabili quantizzate** e quindi è possibile avere diverse condizioni di equilibrio.

Ci troviamo, a questo punto, con un sistema di nuclei doppio che può essere considerato, arbitrariamente, formato da un nucleo di numero atomico uguale a $Z_2 = \mathbf{38}$ in orbita nello spazio rotante generato da un nucleo attivo formato da $Z_1 = \mathbf{62}$ neutroni attivi, oppure da un nucleo di numero atomico $Z_1 = \mathbf{62}$ in orbita nello spazio rotante generato da un numero di neutroni attivi uguale a $Z_2 = \mathbf{38}$.
Per il calcolo si può procedere considerando separatamente i due sistemi e **assumere come energia liberata dalla fissione il valore medio**.

Consideriamo la prima reazione con trasferimento di **38** neutroni attivi e **62** che restano nel centro dello spazio rotante iniziale.
Il primo trasferimento fornisce l'energia :

$$E_{n0/4} = E_0(99) \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(100) - E_0(99)\right] \cdot \alpha(158) = \mathbf{3.8195}\,\text{MeV}$$

Assumendo uguale a zero l'energia fornita dall'ultimo neutrone trasferito, con **38** neutroni si può ritenere l'energia fornita pari a :

$$E_{t38n} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot \mathbf{38} = \mathbf{72.571}\,\text{MeV}$$

Dopo aver completato il trasferimento dei **38** neutroni attivi e l'assestamento del nucleo sintetizzato, l'energia che si rende disponibile sarà data da quella fornita dal trasferimento più quella fornita dalla sintesi del nucleo satellite, che coincide con l'energia di legame dell'isotopo Sr_{38}^{98} alla quale bisogna però

1818t

detrarre l'energia di sintesi dei deutoni orbitali, in quanto sono stati utilizzati quelli già presenti nell'isotopo di partenza Fm_{100}^{258} . Si ha dunque :

$$E_d = E_{ZN}(38\,;\,98) + E_{t38n} - I(38\,;\,98) \cdot \mathbf{2.2246} =$$

$$= \mathbf{827.730} + \mathbf{72.571} - \mathbf{22} \cdot \mathbf{2.2246} = \mathbf{851.360}\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Sr_{38}^{98} per portarlo dal quarto livello al punto di equilibrio, che coincide con $R_{ZP7}(62\,;\,160)$ risulta :

$$E_{Sr4/7} = E_0(62) \cdot \mathbf{98} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2 \cdot 4^2}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2 \cdot 7^2}} \right) = \mathbf{536.003}\ \text{MeV}$$

Per estrarre il nucleo sintetizzato dall'orbita di raggio $R_{ZP7}(62\,;\,160)$ si dovrà compiere il lavoro :

$$L_{Sr7/\infty} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot F_{Sm\text{-}Sr} \cdot R_{ZP7}(62\,;\,160) = \mathbf{258.003}\,\text{MeV}$$

L'energia disponibile per l'estrazione vale :

$$E = E_d - E_{Sr4/7} = \mathbf{315.357}\,\text{MeV}$$

L'energia liberata dal processo dopo l'allontanamento dei nuclei vale :

$$E_{Fm/Sm\text{-}Sr} = E - L_{Sr7/\infty} = \mathbf{57.354}\,\text{MeV}$$

Consideriamo ora il secondo processo, che prevede il trasferimento dei **62** neutroni, lasciandone sul posto **38** . Si avrà :

$$E_{t62n} \simeq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot E_{n0/4} \cdot \mathbf{62} = \mathbf{118.405}\,\text{MeV}$$

$$E_d = E_{ZN}(62\,;\,160) + E_{t62n} - I(62\,;\,160) \cdot \mathbf{2.2246} =$$

$$= \mathbf{1303.21} + \mathbf{118.405} - \mathbf{36} \cdot \mathbf{2.2246} = \mathbf{1341.529}\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Sm_{62}^{160} per portarlo dal quarto livello

1818u

al punto di equilibrio risulta :

$$E_{Sm4/7} = E_0(38) \cdot 160 \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 7^2} \right) = \mathbf{672.695} \text{ MeV}$$

il lavoro che si deve compiere per l'estrazione :

$$L_{Sm7/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Sr\text{-}Sm} \cdot R_{ZP7}(38\,;98) = \mathbf{323.799}\text{ MeV}$$

L'energia liberata dal processo dopo l'allontanamento dei nuclei vale :

$$E_{Fm/Sr\text{-}Sm} = E_d - E_{Sm4/7} - L_{Rb7/\infty} = \mathbf{345.035}\text{ MeV}$$

Il valore medio risulta quindi :

$$E_F = \frac{1}{2} \cdot \left(E_{Fm/Sr\text{-}Sm} + E_{Fm/Sm\text{-}Sr}\right) = \mathbf{201.195}\text{ MeV}$$

A questo punto notiamo che, i nuclei sintetizzati, prima di separarsi si trovano con un grande eccesso di energia, rispetto al valore richiesto per l'equilibrio, ed un **enorme eccesso** di deutoni in orbita rispetto al valore corrispondente alla condizione di massima stabilità, precisamente :

$$\Delta I_{Sr} = I_{Sr} - \left(\frac{38}{8} - 1 \right)^{1.7} = 22 - 10 = 12$$

$$\Delta I_{Sm} = I_{Sm} - \left(\frac{62}{8} - 1 \right)^{1.7} = 36 - 26 = 10$$

L'isotopo Sr^{98}_{38} , presenta già una naturale tendenza ad emettere neutroni e quindi, utilizzando parte dell'energia di eccetazione disponibile, non appena è terminata la sintesi, prima ancora di separarsi, "**scinde due deutoni**" che liberano due protoni e due neutroni, che vengono espulsi prima che possano scindersi, e dopo breve tempo ancora uno, trasformandosi nell'isotopo Sr^{95}_{38} con la seguente configurazione

$$\frac{812.266}{812.16} \quad Sr^{95}_{38} \quad \frac{94.91925}{94.91936} \quad 38n \quad 2{+}0 \quad 8{+}0 \quad 6{+}6 \quad 1{+}12 \quad 1{+}1 \quad 1{+}0 \quad 0{+}0 \quad \frac{6.089M}{\beta^- 23.90s}$$

Gli eventi che si verificano per realizzare per la trasmutazione sono :

1818v

– scissione ed estrazione di un neutrone dal livello **3**, con assorbimento della energia :

$$E_{n3/\infty} = E_D + E_0(38) \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^2} = 13.3229 \text{ MeV}$$

– scissione ed estrazione di un neutrone dal livello **5**, con assorbimento della energia :

$$E_{n5/\infty} = E_D + E_0(38) \cdot \frac{1}{2 \cdot 5^2} = 6.22 \text{ MeV}$$

– scissione ed estrazione di un neutrone dal livello **5**, con assorbimento della energia :

$$E_{n6/\infty} = E_D + E_0(38) \cdot \frac{1}{2 \cdot 6^2} = 4.9992 \text{ MeV}$$

– transizione di un protone dal livello **7** al **3** con liberazione dell'energia :

$$E_{p7/3} = E_0(38) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{2 \cdot 7^2} \right) = 9.05986 \text{ MeV}$$

L'energia complessivamente richiesta per l'emissione di tre neutroni vale :

$$E_{3n\to\infty} = E_{n3/\infty} + E_{n5/\infty} + E_{n6/\infty} - E_{p7/3} = 15.48224 \text{ MeV}$$

L'energia liberata dalla fissione risulta :

$$E_F = 201.195 \text{ MeV} - 15.48224 \text{ MeV} = 185.713 \text{ MeV}$$

E' da tenere presente che, **anche se si presenta vantaggioso** dal punto di vista energetico, il trasferimento di un neutrone attivo dal centro **dà origine a un nucleo squilibrato**, con una particella in eccesso sulle orbite, quindi con tendenza a riportare il sistema all'equilibrio iniziale.

Per questa ragione, il processo necessita di **un'energia di attivazione** per poter iniziare.

Fissato il valore Z del numero di neutroni attivi centrali, la tendenza a dividere

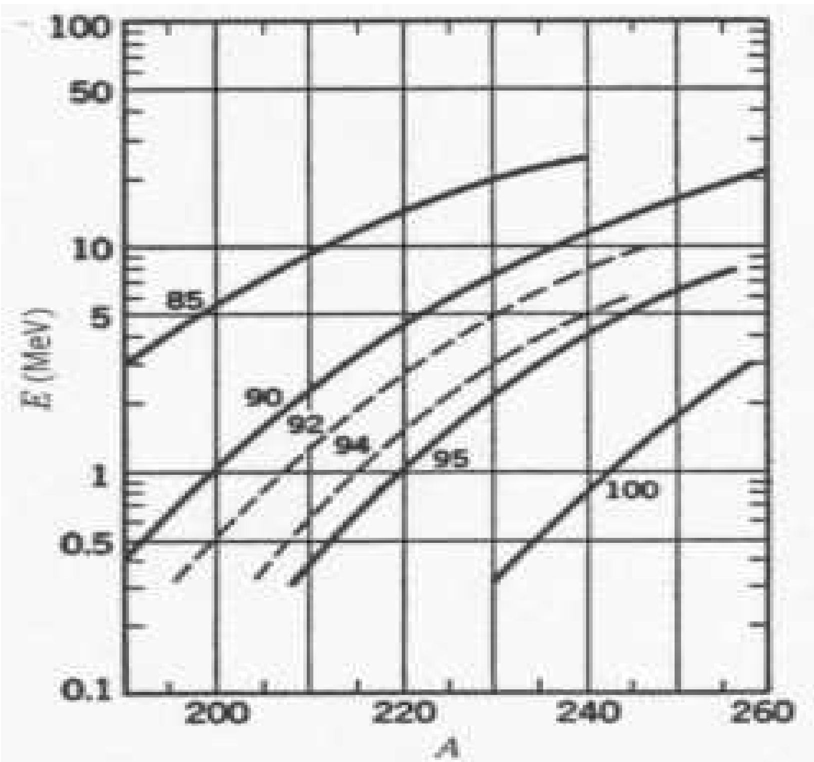
1818w

nuovamente il deutone, appena sintetizzato dal neutrone trasferito sull'orbita, aumenta con il numero dei deutoni già presenti sulle orbite, e **dunque con il rapporto** $\frac{I}{Z}$.

Tenendo presente che la fissione, come l'emissione α si manifesta solo con nuclei che presentano un numero isotopico $I < I_0$, possiamo anche dire che **il valore dell'energia di eccitazione aumenta con la stabilità del nucleo considerato**.

In generale quindi, fissato il numero atomico Z , aumenta con l'aumentare del numero di massa A , mentre, se si fissa il numero di massa, aumenta con il diminuire del numero atomico.

In figura è riportato il valore dell'energia di eccitazione dei nuclei più comuni.



Dal diagramma vediamo che, nell'esempio da noi considerato Fm^{258}_{100} si ha un valore dell'energia di eccitazione $E_{cr} \simeq 2.9$ MeV.

Questa energia può essere fornita dal nucleo stesso, **con una transizione isomerica**, e in questo caso si ha fissione spontanea, **oppure dall'esterno**

1818x

con un qualsiasi mezzo.
Talvolta si usa irradiare l'isotopo da scindere con raggi γ aventi un'energia $E_\gamma \geq E_{cr}$.
Più in generale si usa far assorbire un neutrone all'isotopo avente numero di massa $(A - 1)$. Si ottiene così l'isotopo desiderato di numero di massa A, che, immediadamente dopo la sintesi, dispone di un surplus di energia dato da :

$$E_d = E_{n\infty/p} + E_D + E_0$$

dove E_0 è l'energia cinetica del neutrone, E_D l'energia liberata dalla sintesi del deutone e $E_{n\infty/p}$ l'energia di legame del neutrone catturato sul livello p

data dalla relazione : $$E_{n\infty/p} = E_0(Z) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2}$$

L'energia E_d lascia il nucleo A eccitato per un tempo generalmente di valore molto piccolo e quindi viene emessa come raggio γ di pari energia.

La probabilità che il fotone γ esca dal nuncleo è molto alta e in questo caso il nucleo si diseccita senza nessun effetto vistoso.

In alcuni casi esso interagisce con il nucleo di neutroni attivi e viene utilizzato come energia di attivazione della fissione.
dovendo essere $E_d \geq E_{cr}$, si ricava il valore minimo dell'energia cinetica

del neutrone : $$E_0 \geq E_{cr} - E_D - E_0(Z) \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2}$$

come esempio numerico consideriamo l'isotopo U_{92}^{236}.
Dal diagramma si ricava un'energia di attivazione $E_{cr}(92\ ;\ 236)$ uguale a circa 6.2 MeV.
Le configurazioni dei due isotopi U_{92}^{235} e U_{92}^{236} sono le seguenti.

$\frac{1783.54}{1783.9}$	U_{92}^{235}	$\frac{235.04427}{235.043930}$	92n	2+0	8+0	18+0	12+10	1+24	0+17	0+0	$\frac{4.6802M}{\frac{\alpha\, 7.04 \cdot 10^8 a}{0.7204\%}}$
$\frac{1790.01}{1790.4}$	U_{92}^{236}	$\frac{236.04599}{236.045568}$	92n	2+0	8+0	18+0	10+11	1+24	1+17	0+0	$\frac{4.5701M}{\alpha\, 2.342 \cdot 10^7 a}$

1818y

Il neutrone incidente giunge sul quarto livello dell'isotopo U_{92}^{235} e, con uno dei protoni presenti, sintetizza un deutone.
Il quarto livello si trova così in sovrasaturazione e quindi un protone si sposta sul sesto livello.

L'energia che viene liberata con l'assorbimento del neutrone risulta :

$$E_{n\infty/4} = E_0(92) \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^2} = \mathbf{9.57406}\,\text{MeV}$$

Il trasferimento del protone dal quarto al sesto livello assorbe :

$$E_{p4/6} = E_0(92) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 4^2} - \frac{1}{2 \cdot 6^2} \right) = \mathbf{5.31892}\,\text{MeV}$$

L'energia disponibile per l'attivazione della fissione risulta :

$$E_d = E_{n\infty/4} + E_D + E_{p4/6} = \mathbf{6.47974}\,\text{MeV}$$

l'energia cinetica che dovrà avere il neutrone incidente sarà :

$$E_0 \geq E_{cr} - E_d = -\mathbf{0.27974}\,\text{MeV}$$

Questo risultato ci dice che in questo caso è sufficiente un neutrone termico, ossia con energia cinetica confrontabile con quella associata **all'agitazione termica**.
Consideriamo inizialmente la fissione simmetrica : $U_{\mathbf{92}}^{\mathbf{236}} \longrightarrow \mathbf{2} \cdot Pd_{46}^{118}$
I nuclei prodotti hanno la configurazione :

$$\frac{991.554}{991.90} \quad Pd_{46}^{118} \quad \frac{117.91935}{117.91898} \quad 46n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 10+4 \quad 0+16 \quad 0+3 \quad 0+2 \quad 0+1 \quad \frac{4.163\text{M}}{\beta^- \, 1.90\text{s}}$$

con fattore di forma :

$$\alpha(72) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{98}} = \mathbf{4.195964}$$

Il fattore di forma dell'isotopo di partenza U_{92}^{236} vale :

$$\frac{1790.01}{1790.4} \quad U_{92}^{236} \quad \frac{236.04599}{236.045568} \quad 92n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 18+0 \quad 10+11 \quad 1+24 \quad 1+17 \quad 0+0 \quad \frac{4.5701\text{M}}{\alpha \, 2.342 \cdot 10^7 \text{a}}$$

1818z

$$\alpha(144) = 4 + \frac{49}{50} + \frac{35}{72} = 5.466111$$

Per il primo neutrone trasferito si ha :

$$E_{n0/4} = \frac{E_0(91)}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(92) - E_0(91) \right] \cdot \alpha(144) = 3.032203 \, \text{MeV}$$

Con il trasferimento di **46** neutroni attivi in orbita l'energia liberata sarà :

$$E_{46n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n04} \cdot 46 = 69.74067 \, \text{MeV}$$

A questo valore dobbiamo aggiungere l'energia sviluppata dalla sintesi del nucleo in orbita, detraendo l'energia di sintesi dei suoi deutoni, che erano già presenti in orbita come tali . Si ottiene così :

$$E_d = E_{ZN}(46\,;\,118) + E_{46n0/4} - I(46\,;\,118) \cdot 2.2246 =$$

$$= 991.90 + 69.74067 - 26 \cdot 2.2246 = 1003.801 \, \text{MeV}$$

Considerando che la sintesi del nucleo in orbita è stata realizzata sul quarto livello dell'attuale nucleo Pd_{46}^{118} , calcoliamo l'energia di estrazione delle **118** unità di massa, del nucleo orbitante Pd_{46}^{118} , dalla quarta orbita.
Si ha dunque :

$$E_{Pd4/\infty} = E_0(46) \cdot \frac{118}{2 \cdot 4^2} = 820.727 \, \text{MeV}$$

L'energia con la quale i due nuclei si allontanano vale quindi :

$$E_{U/Pd\text{-}Pd} = E_d - E_{Pd4/\infty} = 183.074 \, \text{MeV}$$

Verifichiamo il risultato considerando l'energia di estrazione uguale a quella che il nucleo Pd_{46}^{118} sviluppa quando, partendo da una distanza $d = \infty$ va a posizionarsi sulla quarta orbita dell'altro Pd_{46}^{118}.
Il raggio dell'orbita vale :

1818z1

$$R_p(46\,;4) = \frac{54.1211 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}{1 - \frac{|46-18|^{\frac{5}{4}}}{1200}} \cdot 46^{\frac{1}{3}} \cdot 4^2 = 3278.677 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

la forza d'interazione tra i due nuclei risulta :

$$F_{Pd\text{-}Pd} = \frac{K_1^2 \cdot m_2^*}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{K_p^2}{2} \cdot 46\right) \cdot (118 \cdot 1\,\mathrm{amu})}{R_p^2(46\,;4)} = 79.6336\,\mathrm{Nw}$$

L'energia che si deve spendere per separarli sarà :

$$L_{Pd4/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Pd\text{-}Pd} \cdot R_p(46\,;4) = 814.806\,\mathrm{MeV}$$

L'energia fornita dalla fissione, fino alla separazione dei due nuclei sarà :

$$E_{U/Pd\text{-}Pd} = E_d - L_{Pd7/\infty} = 188.995\,\mathrm{MeV}$$

Praticamente coincidente co il valore determinato per altra via.

Analizziamo ora la fissione asimmetrica.

$$\frac{1790.01}{1790.4} \quad U_{92}^{236} \quad \frac{236.04599}{236.045568} \quad 92n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 18+0 \quad 10+11 \quad 1+24 \quad 1+17 \quad 0+0 \quad \frac{4.5701\mathrm{M}}{\alpha\, 2.342 \cdot 10^7 \mathrm{a}}$$

L'isotopo U_{92}^{236} presenta un rapporto : $\mathbf{k} = \frac{Z}{I} = \frac{92}{52} = 1.769231$

Per cercare la coppia di prodotti della fissione più probabile, ipotizziamo un valore iniziale $Z_1 = 38$ e quindi si ottiene : $I_1 = \frac{Z_1}{k} = 21$

Si avrà quindi la coppia : $A_1(38\,;97)$; $A_2(54\,;139)$

con i rapporti :

1818z2

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{1.809524} \quad ; \quad \mathbf{k_2} = \mathbf{1.741935}$$

Proviamo se migliorano i rapporti diminuendo di una unità Z_1 . Si ottiene :

$I_1 = \dfrac{Z_1}{\mathbf{k}} = \mathbf{21}$ e quindi si ha la coppia : $A_1(37\ ;\ 95)$; $A_2(55\ ;\ 141)$

con i rapporti : $\mathbf{k_1} = \dfrac{\mathbf{37}}{\mathbf{21}} = \mathbf{1.761905}$; $\mathbf{k_2} = \dfrac{\mathbf{55}}{\mathbf{31}} = \mathbf{1.774193}$

Quest'ultima risulta dunque la coppia più probabile.

$\frac{1169.28}{1169.5}$ Cs_{55}^{141} $\frac{140.92028}{140.920046}$ 55n 2+0 8+0 14+2 0+16 0+11 0+2 0+0 $\frac{5.253\text{M}}{\beta^- 24.84\text{s}}$

$$\alpha(86) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{22}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{72}} = \mathbf{4.495556}$$

$\frac{804.166}{803.69}$ Rb_{37}^{95} $\frac{94.92878}{94.92930}$ 37n 2+0 8+0 4+7 0+12 1+1 1+1 0+0 $\frac{9.229\text{M}}{\beta^- 377.7\text{ms}}$

$$\alpha(58) = \mathbf{3} + \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{32}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{72}} = \mathbf{3.851667}$$

E' da osservare che la reazione $U_{92}^{236} \longrightarrow Rb_{37}^{95} + Cs_{55}^{141}$ si può realizzare sia spostando in orbita $\mathbf{37}$ neutroni attivi, lasciandone nel centro altri $\mathbf{55}$, che spostandone $\mathbf{55}$, lasciando $\mathbf{37}$ unità nel centro.

Data la simmetria del sistema, non abbiamo alcun motivo per privilegiare una delle due soluzioni, per cui pensiamo che vengano adottate entrambe e che, come osservatori esterni, il risultato che osserviamo sia quello medio fornito dalle due reazioni, realizzate con la stessa probabilità.

I valori dei raggi della quarta orbita nucleare risultano :

$$R_{ZP4}(37\ ;\ 95) = \frac{\mathbf{54.1211 \cdot 10^{-15}}\,\text{m}}{\mathbf{1} - \dfrac{\left|\mathbf{37 - 18}\right|^{\frac{5}{4}}}{\mathbf{1200}}} \cdot \mathbf{37}^{\frac{1}{3}} \cdot \mathbf{4^2} = \mathbf{2984.142 \cdot 10^{-15}}\,\text{m}$$

1818z3

$$R_{ZP4}(55\,;\,141) = \frac{54.1211 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}{1 - \frac{\left|55 - 18\right|^{\frac{5}{4}}}{1200}} \cdot 55^{\frac{1}{3}} \cdot 4^2 = 3564.156 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

Sulle due orbite la forza d'interazione nucleare risulta :

$$F_{Cs\text{-}Rb} = \frac{K_{Cs}^2 \cdot m_{Rb}}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{K_p^2}{2} \cdot 55\right) \cdot (95 \cdot 1\,\mathrm{amu})}{R_{ZP4}^2(55\,;\,141)} = 64.86745\,\mathrm{Nw}$$

$$F_{Rb\text{-}Cs} = \frac{K_{Rb}^2 \cdot m_{Cs}}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{K_p^2}{2} \cdot 37\right) \cdot (141 \cdot 1\,\mathrm{amu})}{R_{ZP4}^2(37\,;\,95)} = 92.39231\,\mathrm{Nw}$$

Consideriamo la prima reazione con trasferimento di 37 neutroni attivi e 55 che restano nel centro dello spazio rotante iniziale.

L'energia fornita complessivamente dal trasferimento dei neutroni vale:

$$E_{37n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 37 = \frac{1}{2} \cdot 3.032203\,\mathrm{MeV} \cdot 37 = 56.0958\,\mathrm{MeV}$$

$$E_d = E_{ZN}(37\,;\,95) + E_d^{**} - I(37\,;\,95) \cdot 2.2246 =$$

$$= 803.69 + 56.0958 - 21 \cdot 2.2246 = 813.069\,\mathrm{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Rb_{37}^{95} per estrarlo dalla quarta orbita dello spazio rotante del Cs_{55}^{141} ,di raggio $R_{ZP4}(55\,;\,141)$, risulta :

$$E_{Rb4/\infty} = E_0(55) \cdot \frac{95}{2 \cdot 4^2} = 726.75\,\mathrm{MeV}$$

1818z4

L'energia liberata dalla fissione risulta :

$$E_{U/Cs\text{-}Rb} = E_d - E_{Rb4/\infty} = 86.319 \text{ MeV}$$

Utilizzando la forza d'interazione nucleare, il lavoro che si deve compiere per la separazione risulta :

$$L_{Rb4/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Cs\text{-}Rb} \cdot R_{ZP4}(55\,;\,141) = 721.511 \text{ MeV}$$

L'energia eccedente risulta :

$$E = E_d - L_{Rb4/\infty} = 91.558 \text{ MeV}$$

Consideriamo ora il secondo processo, che prevede il trasferimento dei 55 neutroni, lasciandone sul posto 37 . Si avrà :

$$E_{55n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 55 = 83.3856 \text{ MeV}$$

$$E_d = E_{ZN}(55\,;\,141) + E_d^{**} - I(55\,;\,141) \cdot 2.2246 =$$

$$= 1169.5 + 83.3856 - 31 \cdot 2.2246 = 1183.923 \text{ MeV}$$

L'energia che si dovrà fornire all'isotopo Cs_{55}^{141} per estrarlo dal quarto livello dello spazio rotante del Rb_{37}^{95} vale :

$$E_{Cs4/\infty} = E_0(37) \cdot \frac{141}{2 \cdot 4^2} = 866.709 \text{ MeV}$$

L'energia eccedente, che viene liberata, sarà :

$$E_{U/Rb\text{-}Cs} = E_d - E_{Cs4/\infty} = 317.214 \text{ MeV}$$

Il valore medio fornito dalla scissione delle due configurazioni risulta :

$$E_F = \frac{1}{2} \cdot \left(E_{U/Cs\text{-}Rb} + E_{U/Rb\text{-}Cs}\right) = 201.766 \text{ MeV}$$

il lavoro che si deve compiere per l'estrazione, utilizzando le forze nucleari :

1818z5

$$L_{Cs4/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Rb\text{-}Cs} \cdot R_{ZP4}(37\,;\,95) = \mathbf{860.428}\,\text{MeV}$$

L’energia liberata dal processo dopo l’allontanamento dei nuclei vale :

$$E_{U/Rb\text{-}Cs} = E_d - L_{Cs4/\infty} = \mathbf{323.495}\,\text{MeV}$$

Il valore medio fornito dai due processi risulta : $E_{U/Cs\text{-}Rb} = \mathbf{207.526}\,\text{MeV}$
L’accordo tra i risultati ottenuti con le due vie è accettabile.

L’isotopo Rb_{37}^{95} , subito dopo la sintesi, **prima della separazione**, presenta un numero isotopico $I = \mathbf{21} >> I_0$ e quindi presenta una forte tendenza ad emettere direttamente neutroni e quindi ne emette due, trasformandosi nello isotopo Rb_{37}^{93} , che presenta la seguente configurazione nucleare .

$$\frac{794.267}{794.31} \quad Rb_{37}^{93} \quad \frac{92.92208}{92.92204} \quad 37n \quad 2{+}0 \quad 8{+}0 \quad 6{+}6 \quad 0{+}12 \quad 1{+}1 \quad 1{+}0 \quad 0{+}0 \quad \frac{7.466\text{M}}{\beta^{-}5.84\text{s}}$$

partendo dalla :

$$\frac{804.166}{803.69} \quad Rb_{37}^{95} \quad \frac{94.92878}{94.92930} \quad 37n \quad 2{+}0 \quad 8{+}0 \quad 4{+}7 \quad 0{+}12 \quad 1{+}1 \quad 1{+}1 \quad 0{+}0 \quad \frac{9.229\text{M}}{\beta^{-}377.7\text{ms}}$$

Dal confronto fra le due configurazioni vediamo che **l’energia assorbita** dai neutoni emessi risulta dalle seguenti reazioni :

Sul terzo livello dell’isotopo Rb_{37}^{95} si scinde un deutone con l’espulsione del neutrone, lasciando sull’orbita il protone. L’energia assorbita vale :

$$E_{n3/\infty} = E_D + E_0(37) \cdot \frac{1}{2 \cdot 3^2} = \mathbf{13.1524}\,\text{MeV}$$

Sul sesto livello si scinde il deutone che espelle il neutrone, mentre il protone si sposta sul terzo livello per saturarlo.
Il neutrone assorbe :

$$E_{n6/\infty} = E_D + E_0(37) \cdot \frac{1}{2 \cdot 6^2} = \mathbf{4.95654}\,\text{MeV}$$

il trasferimento del protone libera l’energia :

1818z6

$$E_{p6/3} = E_0(37) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{2 \cdot 6^2} \right) = \mathbf{8.19583}\,\text{MeV}$$

I due neutroni emessi assorbono quindi complessivamente :

$$E_{2nRb/\infty} = E_{n3/\infty} + E_{n6/\infty} - E_{p6/3} = \mathbf{9.9131}\,\text{MeV}$$

L’energia realmente liberata dalla fissione risulta :

$$E_F = E_{U/Cs\text{-}Rb} - E_{2nRb/\infty} = \mathbf{197.613}\,\text{MeV}$$

Osserviamo infine che i neutroni pronti utilizzano tutta l’energia di legame per raggiungere la velocità di fuga, per cui **la loro velocità di uscita**, **rispetto al nucleo emettitore**, **e nulla**. Dunque essi si allontanano dal centro di massa del sistema con l’energia cinetica uguale al valore associato a ogni nucleone dei due frammenti. **Il valore di energia più probabile sarà quindi** :

$$E_n = \frac{E_F}{A_0\left(U_{92}^{236}\right)} = \frac{\mathbf{197.613}\,\text{MeV}}{\mathbf{236}} = \mathbf{0.837}\,\text{MeV}$$

Consideriamo ora l’isotopo più stabile dell’uranio, U_{92}^{238} , che si presenta con la seguente configurazione nucleare.

$$\frac{1801.83}{1801.7} \quad U_{92}^{238} \quad \frac{238.05143}{238.050788} \quad 92n \;\; 2+0 \;\; 8+0 \;\; 18+0 \;\; 8+12 \;\; 1+24 \;\; 0+18 \;\; 1+0 \quad \frac{4.270\text{M}}{\frac{\alpha\ 4.468 \cdot 10^9\text{a}}{99.2742\%}}$$

il fattore di forma vale :

$$\alpha(146) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{49}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{98}} = \mathbf{5.490204}$$

dal diagramma che abbiamo riportato si ricava **l’energia di attivazione** che risulta uguale a $E_{cr}(92\,;\,239) = \mathbf{6.5}\,\text{MeV}$.

Dalla configurazione dei livelli nucleari vediamo che, se inviamo un neutrone sul quinto livello, con il protone presente sintetizza un deutone che, utilizzando parte dell’energia liberata, si trasferisce sul sesto, sintetizzando così l’isotopo U_{92}^{239} , con la seguente configurazione.

1818z7

$\frac{1806.43}{1806.5}$ U_{92}^{239} $\frac{239.05436}{239.054293}$ 92n 2+0 8+0 18+0 8+12 0+24 0+19 1+0 $\frac{1.2613M}{\beta^- \, 23.45m}$

$$\alpha(147) = \mathbf{4} + \frac{\mathbf{48}}{\mathbf{50}} + \frac{\mathbf{38}}{\mathbf{72}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{98}} = \mathbf{5.497982}$$

L'energia sviluppata dalla catturadel neutrone e sintesi del deutone risulta :

$$E_{n\infty/5} = E_D + E_0(92) \cdot \frac{1}{2 \cdot 5^2} = \mathbf{8.352} \text{ MeV}$$

l'energia assorbita dal trasferimento del deutone dal quinto al sesto livello :

$$E_{D5/6} = E_0(92) \cdot \left(\frac{2}{2 \cdot 5^2} - \frac{2}{2 \cdot 6^2} \right) = \mathbf{3.7445} \text{ MeV}$$

L'energia complessivamente liberata sarà :

$$E_{238/239} = E_{n\infty/5} - E_{D5/6} = \mathbf{4.6075} \text{ MeV}$$

Per attivare la fissione è quindi necessario che il neutrone abbia un'energia cinetica iniziale :

$$E_0 > E_{cr}(92\,;\,239) - E_{238/239} = \mathbf{1.8925} \text{ MeV}$$

A questo punto vediamo che l'isotopo U_{92}^{239} presenta sulle orbite un deutone in eccesso rispetto al numero associato alla massima stabilità (**54**) e quindi, per aumentare la stabilità, lo riduce emettendo un β^-.
Si trasforma così nell'isobaro Np_{93}^{239} che, con un'altra emissione β^- genera l'isotopo Pu_{94}^{239} con la configurazione :

$\frac{1806.73}{1806.9}$ Pu_{94}^{239} $\frac{239.05236}{239.052163}$ 94n 2+0 8+0 18+0 14+9 0+25 1+17 0+0 $\frac{5.24452M}{\alpha{-}FS \, 24110a}$

che, con la cattura di un neutrone, si trasforma in Pu_{94}^{240}

$\frac{1813.24}{1813.4}$ Pu_{94}^{240} $\frac{240.05404}{240.053813}$ 94n 2+0 8+0 18+0 14+9 0+25 0+18 0+0 $\frac{5.25576M}{\alpha{-}FS \, 6561a}$

$$\alpha(146) = \mathbf{5} + \frac{\mathbf{36}}{\mathbf{72}} = \mathbf{5.5}$$

1818z8

L'energia sviluppata dal neutrone catturato sul sesto livello con la sintesi di un deutone vale :

$$E_{n\infty/6} = E_D + E_0(94) \cdot \frac{1}{2 \cdot 6^2} = 6.5121 \text{ MeV}$$

L'energia di attivazione della fissione dalle curve risulta $E_{cr} = 4.9$ MeV.
Per produrre la fissione sono quindi sufficienti neutroni termici.

Analizziamo quindi la fissione di questo isotopo, iniziando dalla simmetrica.
si hanno due nuclei di :

$$\frac{1007.96}{1007.4} \quad Ag^{120}_{47} \quad \frac{119.91823}{119.91879} \quad 47n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 8+5 \quad 0+16 \quad 1+3 \quad 1+2 \quad 1+0 \quad \frac{8.306M}{\beta^- \; 1.23s}$$

L'energia liberata dal trasferimento in orbita del primo neutrone attivo vale :

$$E_{n0/4} = \frac{E_0(93)}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(94) - E_0(93) \right] \cdot \alpha(146) = 3.28594 \text{ MeV}$$

Con il trasferimento di **47** neutroni attivi in orbita l'energia liberata sarà :

$$E_{47n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 47 = 77.2196 \text{ MeV}$$

Dopo la sintesi, l'energia libera disponibile risulta :

$$E_d = E_{ZN}(47 ; 120) + E_{47n0/4} - I(47 ; 120) \cdot 2.2246 =$$

$$= 1007.96 + 77.2196 - 26 \cdot 2.2246 = 1027.34 \text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Ag^{120}_{47} per estrarlo dal quarto livello risulta :

$$E_{Ag4/\infty} = E_0(47) \cdot \frac{120}{2 \cdot 4^2} = 844.537 \text{ MeV}$$

l'energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Ag4/\infty} = 182.803 \text{ MeV}$$

Utilizzando la forza d'interazione nucleare, si ottiene :

1818z9

$$R_{ZP4}(47\,;\,120) = \frac{54.1211 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}}{1 - \frac{|47 - 18|^{\frac{5}{4}}}{1200}} \cdot 47^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{2} = 3310.685 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{m}$$

$$F_{Ag\text{-}Ag} = \frac{K_{Ag}^{2} \cdot m_{Ag}}{R_{1\text{-}2}^{2}} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{K_{p}^{2}}{2} \cdot 47\right) \cdot (120 \cdot 1\,\mathrm{amu})}{R_{ZP4}^{2}(47\,;\,120)} = 81.1526\,\mathrm{Nw}$$

Il lavoro che si deve compiere per la separazione risulta :

$$L_{Ag4/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Ag\text{-}Ag} \cdot R_{ZP4}(47\,;\,120) = 838.455\,\mathrm{MeV}$$

L'energia eccedente, che viene liberata :

$$E = E_{d} - L_{Ag4/\infty} = 188.885\,\mathrm{MeV}$$

Consideriamo ora la fissione asimmetrica più probabile.

Il rapporto tra numero atomico e numero isotopico dell'isotopo Pu_{94}^{240} vale :

$$k = \frac{94}{52} = 1.807692$$

Ipotizziamo inizialmente $Z_1 = 38$ e otteniamo : $I_1 = \frac{Z_1}{k} = 21$

si ricava così la coppia più probabile : $A_1(38\,;\,97)$ e $A_2(56\,;\,143)$ con le configurazioni :

$\frac{821.514}{821.98}$ Sr_{38}^{97} $\frac{96.92665}{96.92615}$ 38n 2+0 8+0 4+7 1+12 1+1 0+1 1+0 $\frac{7.539M}{\beta^{-}429ms}$

$\frac{1184.43}{1184.3}$ Ba_{56}^{143} $\frac{142.92051}{142.920627}$ 56n 2+0 8+0 14+2 0+16 1+11 0+2 0+0 $\frac{4.234M}{\beta^{-}14.5s}$

1818z10

Consideriamo inizialmente il trasferimento in orbita di **38** neutroni attivi.
L'energia liberata vale :

$$E_{n0/4} = \frac{E_0(93)}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(94) - E_0(93) \right] \cdot \alpha(146) = \mathbf{3.28594}\,\text{MeV}$$

Con il trasferimento di **47** neutroni attivi in orbita l'energia liberata sarà :

$$E_{38n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot \mathbf{38} = \mathbf{62.4329}\,\text{MeV}$$

Dopo la sintesi, l'energia libera disponibile risulta :

$$E_d = E_{ZN}(38\,;\,97) + E_{38n0/4} - I(38\,;\,97) \cdot \mathbf{2.2246} =$$

$$= \mathbf{821.514} + \mathbf{62.4329} - \mathbf{21} \cdot \mathbf{2.2246} = \mathbf{837.230}\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Sr_{38}^{97} per estrarlo dal quarto livello :

$$E_{Sr4/\infty} = E_0(56) \cdot \frac{97}{2 \cdot 4^2} = \mathbf{748.931}\ \text{MeV}$$

l'energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Sr4/\infty} = \mathbf{88.299}\,\text{MeV}$$

Considerando ora il trasferimento in orbita di **56** neutroni avremo :

$$E_{56n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot \mathbf{56} = \mathbf{92.006}\,\text{MeV}$$

Dopo la sintesi, l'energia libera disponibile risulta :

$$E_d = E_{ZN}(56\,;\,143) + E_{56n0/4} - I(56\,;\,143) \cdot \mathbf{2.2246} =$$

$$= \mathbf{1184.43} + \mathbf{92.006} - \mathbf{31} \cdot \mathbf{2.2246} = \mathbf{1207.473}\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Ba_{56}^{143} per estrarlo dal quarto livello :

1818z11

$$E_{Ba4/\infty} = E_0(38) \cdot \frac{143}{2 \cdot 4^2} = \mathbf{892.722}\ \text{MeV}$$

l’energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Ba4/\infty} = \mathbf{314.751}\ \text{MeV}$$

Il valore medio fornito dalle due configurazioni risulta :

$$E = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{88.299} + \mathbf{314.751}) = \mathbf{201.525}\ \text{MeV}$$

Anche in questo caso, **prima della separazione** l’isotopo Sr_{38}^{97} espelle due neutroni, trasformandosi in :

$$\frac{812.266}{812.16} \quad Sr_{38}^{95} \quad \frac{94.91925}{94.91936} \quad 38n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 6+6 \quad 1+12 \quad 1+1 \quad 1+0 \quad 0+0 \quad \frac{6.089M}{\beta^- 23.90s}$$

partendo da :

$$\frac{821.514}{821.98} \quad Sr_{38}^{97} \quad \frac{96.92665}{96.92615} \quad 38n \quad 2+0 \quad 8+0 \quad 4+7 \quad 1+12 \quad 1+1 \quad 0+1 \quad 1+0 \quad \frac{7.539M}{\beta^- 429ms}$$

Dal confronto fra le configurazioni, possiamo calcolare l’energia di estrazione dei due neutroni.

Sul sesto livello si scinde il deutone che lascia sull’orbita il protone ed espelle il neutrone.
Sul terzo livello si scinde un deutone che lascia sull’orbita il protone mentre il neutrone viene espulso.
Il terzo livello, non è più saturo e viene saturato dal protone che si sposta dal settimo livello.
L’energia assorbita dai due neutroni vale dunque :

$$E_{2n3\text{-}6/\infty} = E_0(38) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 6^2} \right) + 2 \cdot E_D = \mathbf{18.3221}\ \text{MeV}$$

Lo spostamento del protone dal settimo al terzo livello libera l’energia :

$$E_{p7/3} = E_0(38) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{2 \cdot 7^2} \right) = \mathbf{9.0599}\ \text{MeV}$$

L’emissione dei due neutroni assorbe quindi complessivamente :

1818z12

$$E_{2n} = E_{2n3\text{-}6/\infty} - E_{p7/3} = \mathbf{9.2266}\,\text{MeV}$$

L’energia liberata dalla fissione risulta : $E_F - E_{2n} = \mathbf{192.298}\,\text{MeV}$

Un isotopo importante per la fissione è il Th^{232}_{90} che presenta si presenta con la configurazione :

$$\frac{1766.55}{1766.7}\quad Th^{232}_{90}\quad \frac{232.03820}{232.038055}\quad 90n\quad 2{+}0\quad 8{+}0\quad 18{+}0\quad 10{+}11\quad 0{+}24\quad 0{+}17\quad 0{+}0\quad \frac{4.0816M}{\frac{\alpha\, 1.4\cdot 10^{10}a}{100\%}}$$

Se cattura un neutrone sul quarto livello, con uno dei protoni presenti,

genera
un deutone che si ferma sull’orbita.

Dato però che il livello diventa sovrasaturo, parte dell’energia liberata viene impiegata per spostare un protone sul quinto livello, dal quale un deutone, con l′energia ancora disponibile, si sposta sul sesto livello.
L’energia liberata dal neutrone assorbito, dopo la sintesi del deutone, vale :

$$E_{n\infty/4} = E_0(90)\cdot\frac{1}{2\cdot 4^2} + E_D = \mathbf{11.72335}\ \text{MeV}$$

l’energia assorbita dal protone :

$$E_{p4/5} = E_0(90)\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 4^2} - \frac{1}{2\cdot 5^2}\right) = \mathbf{3.41955}\ \text{MeV}$$

l’energia assorbita dal trasferimento del deutone :

$$E_{D4/5} = E_0(90)\cdot\left(\frac{2}{2\cdot 5^2} - \frac{2}{2\cdot 6^2}\right) = \mathbf{3.71507}\ \text{MeV}$$

l′energia complessivamente liberata sarà :

$$E_{232\text{-}233} = E_{n\infty/4} - E_{p4/5} - E_{D4/5} = \mathbf{4.58873}\ \text{MeV}$$

l’isotopo formato risulta con la confifurazione :

$$\frac{1771.13}{1771.5}\quad Th^{233}_{90}\quad \frac{233.04195}{233.041582}\quad 90n\quad 2{+}0\quad 8{+}0\quad 18{+}0\quad 8{+}12\quad 1{+}23\quad 0{+}18\quad 0{+}0\quad \frac{1.2461M}{\beta^-\, 21.83m}$$

1818z13

Per $Z = 90$ il numero di massa corrispondente alla massima stabilità vale :

$$A = 2 \cdot Z + \left(\frac{Z}{8} - 1 \right)^{1.7} = 232.267 \rightarrow 232$$

Il Th_{90}^{233} ha dunque un deutone in eccesso e quindi emette un β^- e diventa :

$\frac{1772.78}{1771.9}$ Pa_{91}^{233} $\frac{233.03934}{233.040247}$ 91n 2+0 8+0 18+0 10+11 1+24 1+16 0+0 $\frac{570.3M}{\beta^- 26.975d}$

e con un'altra emissione β^-si ottiene l'isotopo U_{92}^{233}

$\frac{1772.46}{1771.7}$ U_{92}^{233} $\frac{233.03884}{233.039635}$ 92n 2+0 8+0 18+0 14+9 0+25 1+15 0+0 $\frac{4.9087M}{\alpha\, 1.592 \cdot 10^5 a}$

che presenta un'energia di attivazione $E_{cr} = 5.5\,\text{MeV}$

Con la cattura di un neutrone sul sesto livello si trasforma nell'isotopo U_{92}^{234}.

$\frac{1778.94}{1778.6}$ U_{92}^{234} $\frac{234.04055}{234.040952}$ 92n 2+0 8+0 18+0 14+9 0+25 0+16 0+0 $\frac{4.8598M}{\frac{\alpha\, 2.455 \cdot 10^5 a}{0.0054\%}}$

L'energia liberata vale :

$$E_{n\infty/6} = E_0(92) \cdot \frac{1}{2 \cdot 6^2} + E_D = 6.47974 \text{ MeV}$$

Essendo $E_{n\infty/6} > E_{cr}$ sono sufficienti neutroni termici per attivare la fissione.

Il fattore di forma vale :

$$\alpha(142) = 5 + \frac{32}{72} = 5.444444$$

Esaminiamo prima la fissione simmetrica, che, prima della scissione, forma i due isotopi :

$\frac{984.893}{984.89}$ Pd_{46}^{117} $\frac{116.91784}{116.91784}$ 46n 2+0 8+0 10+4 0+16 1+2 0+2 0+1 $\frac{5.758M}{\beta^- 4.30s}$

Il trasferimento in orbita del primo neutrone attivo fornisce l'energia :

$$E_{n0/4} = \frac{E_0(91)}{2 \cdot 4^2} - \left[E_0(92) - E_0(91) \right] \cdot \alpha(142) = 3.057986 \text{MeV}$$

Con il trasferimento di 46 neutroni attivi in orbita l'energia liberata sarà :

1818z14

$$E_{46n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 46 = 70.3337\,\text{MeV}$$

Dopo la sintesi, l'energia libera disponibile risulta :

$$E_d = E_{ZN}(46\,;117) + E_{47n0/4} - I(46\,;117) \cdot 2.2246 =$$

$$= 984.893 + 70.3337 - 25 \cdot 2.2246 = 999.612\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Pd_{46}^{117} per estrarlo dal quarto livello :

$$E_{Pd4/\infty} = E_0(46) \cdot \frac{117}{2 \cdot 4^2} = 813.772\ \text{MeV}$$

l'energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Pd4/\infty} = 185.841\,\text{MeV}$$

Verifichiamo il risultato utilizzando le forfe d'interazione nucleare.
La distanza tra i nuclei è uguale al raggio della quarta orbita, che vale :

$$R_{ZP4}(46\,;117) = \frac{54.1211 \cdot 10^{-15}\,\text{m}}{1 - \frac{|46 - 18|^{\frac{5}{4}}}{1200}} \cdot 46^{\frac{1}{3}} \cdot 4^2 = 3278.676 \cdot 10^{-15}\,\text{m}$$

La forza d'interazione risulta quindi :

$$F_{Pd\text{-}Pd} = \frac{K_{Pd}^2 . m_{Pd}}{R_{1\text{-}2}^2} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{K_p^2}{2} \cdot 46\right) \cdot (117 \cdot 1\,\text{amu})}{R_{ZP4}^2(46\,;117)} = 78.9588\,\text{Nw}$$

L'energia che si deve spendere per separarli sarà :

$$L_{Pd4/\infty} = \frac{1}{2} \cdot F_{Pd\text{-}Pd} \cdot R_{ZP4}(46\,;117) = 807.902\,\text{MeV}$$

L'energia fornita dalla fissione, fino alla separazione dei due nuclei sarà :

1818z15

$$E_{U/Pd\text{-}Pd} = E_d - L_{Pd4/\infty} = \mathbf{191.71}\,\text{MeV}$$

Consideriamo ora la fissione asimmetrica con i prodotti più probabili.

$$\mathbf{k} = \frac{Z_0}{I_0} = \frac{\mathbf{92}}{\mathbf{50}} = \mathbf{1.84}$$

Assumendo inizialmente $Z_1 = \mathbf{38}$ si ha : $\quad I_1 = \dfrac{Z_1}{\mathbf{k}} = \mathbf{21}$

Si ottiene così la coppia : $A_1(38 : 97)$ e $A_2(54 : 137)$ con i rapporti :

$$\mathbf{k_1} = \mathbf{1.8095} \quad ; \quad \mathbf{k_2} = \mathbf{1.8621}$$

Spostandoci di una unità, abbiamo $A_1(37 : 94)$ e $A_2(55 : 140)$ e i rapporti risultano : $\mathbf{k_1} = \mathbf{1.8333}$; $\mathbf{k_2} = \mathbf{1.85}$

Esaminiamo quindi quest'ultimo caso.

$\frac{798.018}{798.31}$	Rb^{94}_{37}	$\frac{93.92672}{93.92640}$	37n	2+0	8+0	6+6	0+12	0+1	1+1	0+0	$\frac{10.281\text{M}}{\beta^- 2.702\text{s}}$
$\frac{1163.66}{1164.0}$	Cs^{140}_{55}	$\frac{139.91765}{139.917282}$	55n	2+0	8+0	14+2	0+16	0+11	1+1	0+0	$\frac{6.220\text{M}}{\beta^- 63.7\text{s}}$

$$E_{n0/4} = \frac{E_0(91)}{\mathbf{2 \cdot 4^2}} - \left[E_0(92) - E_0(91) \right] \cdot \alpha(142) = \mathbf{3.057986}\,\text{MeV}$$

Con il trasferimento di **37** neutroni attivi in orbita l'energia liberata sarà :

$$E_{37n0/4} \simeq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot E_{n0/4} \cdot \mathbf{37} = \mathbf{56.573}\,\text{MeV}$$

Dopo la sintesi, l'energia libera disponibile risulta :

$$E_d = E_{ZN}(37\,;94) + E_{37n0/4} - I(37\,;94) \cdot \mathbf{2.2246} =$$

$$= \mathbf{798.018} + \mathbf{56.573} - \mathbf{20} \cdot \mathbf{2.2246} = \mathbf{810.099}\,\text{MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Rb^{94}_{37} per estrarlo dalla quarta orbita dello spazio rotante dell'isotopo Cs^{140}_{55}

1818z16

$$E_{Rb4/\infty} = E_0(55) \cdot \frac{94}{2 \cdot 4^2} = 719.1 \text{ MeV}$$

l'energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Rb4/\infty} = 90.999 \text{ MeV}$$

Consideriamo ora l'isotopo Cs^{140}_{55} sintetizzato sulla quarta orbita del Rb^{94}_{37} .

$$E_{55n0/4} \simeq \frac{1}{2} \cdot E_{n0/4} \cdot 55 = 84.095 \text{ MeV}$$

$$E_d = E_{ZN}(55\,;\,140) + E_{55n0/4} - I(55\,;\,140) \cdot 2.2246 =$$

$$= 1163.66 + 84.095 - 30 \cdot 2.2246 = 1181.017 \text{ MeV}$$

L'energia che bisogna fornire al nucleo Cs^{140}_{55} per estrarlo dal quarto livello :

$$E_{Cs4/\infty} = E_0(37) \cdot \frac{140}{2 \cdot 4^2} = 860.563 \text{ MeV}$$

l'energia eccedente, che viene liberata con la fissione, sarà :

$$E_F = E_d - E_{Cs4/\infty} = 320.454 \text{ MeV}$$

Il valore medio fornito dalle due configurazioni risulta :

$$E = \frac{1}{2} \cdot (90.999 + 320.454) = 205.726 \text{ MeV}$$

Per concludere, osserviamo che invece di analizzare separatamente le due configurazioni e fare la media dei risultati, proprio perchè siamo in presenza di uno spazio conservativo, è possibile considerare un solo sistema nel quale la sintesi del nucleo satellite si realizza a una distanza uguale alla somma dei raggi di confine.
Il sistema che così si ottiene è però equivalente ai fini del calcolo, ma non è rappresentativo della realtà fisica.

1818z17