– Teoria della relatività: origine e significato della massa relativistica, equivalenza massa - energia e paradosso del nucleo atomico

In qualsiasi problema fisico **la massa inerziale** viene trattata sempre come caratteristica nota della materia, senza mai chiarirne l'origine ed il significato fisico.
Senza questo chiarimento non sarà però mai possibile capire fino in fondo il suo comportamento.

Questo si verifica anche per la massa relativistica della quale viene data la relazione che descrive la sua dipendenza dalla massa inerziale del corpo in quiete e dalla sua velocità $m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{C_l^2}}} = m_0 \cdot \gamma$

ma **non viene fornita alcuna interpretazione fisica della massa** m_0.
Si verifica solo che la relazione risulta in accordo con il postulato di Einstein sulla velocità della luce.

Non viene però dato alcun rilievo al fatto che essa risulta in disaccordo con il comportamento delle particelle subnucleari, che manifestano **una riduzione della massa rispetto al valore assunto in quiete, anche se raggiungono velocità prossime a quella della luce**.

Un numero A **di nucleoni indipendenti**, **in quiete**, hanno infatti una massa complessiva più elevata di quella del nucleo nel quale **sono in moto**.
La riduzione della massa data dalla relazione di equivalenza tra l'energia di legame e la massa $C_l^2 \cdot \Delta m = \Delta E$ risulterebbe infatti di gran lunga minore dell'aumento relativistico $\Delta m = m_0 \cdot (\gamma - 1)$.

La riduzione della massa che si associa all'energia di legame di un protone in equilibrio sul livello p del nucleo vale :

$$\Delta m_l = - \frac{E_{1P}(z)}{C_l^2} = - \frac{E_0(z)}{2 \cdot p^2 \cdot C_l^2}$$

Con l'espressione della massa relativistica, sullo stesso protone si dovrebbe verificare un incremento della massa :

$$\Delta m_r = m_0 \cdot \left[\left(1 - \frac{E_0(z)}{m_0 \cdot C_l^2 \cdot p^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

risulta :

$$\Delta m_r \simeq \left[\left(1 - 2 \cdot \Delta m_l \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]$$

considerando lo sviluppo in serie di Taylor :

$$\left(1 - x\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 - \ldots\ldots\ldots$$

risulta : $\left(1 - 2 \cdot \Delta m_l\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(1 + 2 \cdot \Delta m_l\right)^{\frac{1}{2}} > \left(1 + \Delta m_l\right)$

e quindi, sostituendo si ha :

$$\Delta m_r > \left[\left(1 + \Delta m_l\right) - 1 \right] \quad \text{da cui :} \quad \Delta m_r > \Delta m_l$$

Tutti i nuclei dovrebbero dunque presentare un eccesso di massa e invece si ha sempre una massa in difetto.

Per esempio, per il nucleo di uranio, con $E_0(92) = 306.37$ MeV , si ottiene :

– sul livello fondamentale : $\Delta m_l = -\ 0.1644508$ uma

$\Delta m_r = +\ 0.2201293$ uma

– sul sesto livello : $\Delta m_l = -\ 0.0045681$ uma

$\Delta m_r = +\ 0.0045994$ uma

Dato che tutti i nuclei presentano un difetto di massa, si deve concludere che negli spazi rotanti rotanti e quindi nel nucleo atomico non si manifestano effetti relarivistici.

Nella teoria degli spazi rotanti ci siamo già occupati del problema dell’origine della massa inerziale con un'analisi qualitativa. Con queste note intendiamo affrontare il problema dal punto di vista quantitativo, per dare una definizione **inequivocabile** di massa inerziale, che consenta di interpretare fisicamente **la massa relativistica**, in modo da poter derivare la relazione che ne indica la dipendenza dalla velocità attraverso un percorso semplice ed intuitivo, che chiarisce anche **l'apparente paradosso del nucleo atomico**.

In realtà, come abbiamo già detto, la massa inerziale non è una caratteristica propria della materia, **ma dello spazio rotante**, di cui esprime la tendenza a ripristinare l'equilibrio quando esso viene perturbato da un agente esterno.

Il valore della massa, che lo spazio rotante "trasferisce all'agente che perturba l'equilibrio attraverso la particella in movimento", sarà quindi variabile in rapporto al valore della perturbazione indotta e non esiste alcun legame definito con la velocità.

Un corpo in moto con la velocità V, se occupa punti dello spazio fisico diversi, presenta masse inerziali diverse.

Questo vale per qualsiasi spazio rotante. Se la Terra occupasse l'orbita del pianeta Marte, avrebbe una massa inerziale più elevata di quella attuale, con una velocità orbitale minore.

L'espressione che abbiamo ricordato è tuttavia ben sperimentata ed è dunque indiscutibile.

Quello che è messo in discussione è invece la sua interpretazione corrente.

Se abbiamo una massa in orbita **alla distanza** R **dal centro di uno spazio rotante** K^2, le caratteristiche di moto **associate all'equilibrio** sono definite dalla legge fondamentale : $V^2 \cdot R = K^2$

Se il moto avviene **su un'orbita circolare stabile** di raggio R_n , la velocità di equilibrio risulta quindi : $V_n = \left(\dfrac{K^2}{R_n} \right)^{\frac{1}{2}}$

alla quale si associa un'energia cinetica :

$$E_{cn} = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot V_n^2 = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot \frac{K^2}{R_n}$$

2291

Dove con m_n abbiamo indicato il valore della massa inerziale **che si misura in queste condizioni di equilibrio**.

Se alla massa in equilibrio **forniamo l'energia** ΔE , la sua velocità tende a

portarsi al valore : $$V_n^* = \left(\frac{2 \cdot (E_{cn} + \Delta E)}{m_n} \right)^{\frac{1}{2}} > V_n$$

Sulla massa si manifesta dunque un'accelerazione centrifuga **che perturba l'equilibrio dello spazio rotante**, il quale manifesta una naturale inerzia tendente a conservare l'equilibrio acquisito, implicita nella legge fondamentale che regola la sua organizzazione $V^2 \cdot R = K^2$.

Esso infatti riduce nuovamente la velocità aumentando il raggio dell'orbita.

L'azione dello spazio rotante, tendente a ripristinare l'equilibrio perturbato, **si manifesta trasferendo alla massa in moto un'azione contraria a quella che ha generato la perturbazione**.

All'azione dell'energia fornita ΔE , che accelera la massa in equilibrio, viene opposta **un'azione frenante** che agisce fino al raggiungimento di una nuova condizione di equilibrio su un'orbita di raggio maggiore e velocità minore.

L'operatore che ha applicato l'azione perturbatrice avverte la reazione come se provenisse direttamente dalla massa sollecitata e quindi associa ad essa **direttamente** la massa inerziale **trasferitale dallo spazio rotante**.

Il valore della **massa inerziale** così introdotto dovrà essere tanto più elevato quanto maggiore è la perturbazione indotta nell'equilibrio dall'energia fornita ΔE.

Dato che la stabilità dell'equilibrio è indicata dal valore dell'energia totale E_t della massa in orbita, **numericamente uguale all'energia cinetica**, fissato il valore dell'energia ΔE , **la pertubazione indotta sarà tanto più elevata quanto minore risulta l'energia di legame** E_{cn} (legame meno stabile e quindi più facilmente perturbabile).

Essa potrà dunque essere descritta dal rapporto che esprime l'eccentricità dell'orbita $e^2 = \frac{\Delta E}{E_{cn}}$.

Lo spazio rotante trasferisce quindi alla massa in equilibrio sull'orbita una massa inerziale proporzionale a : $\frac{\Delta E}{E_{cn}} = \frac{2 \cdot \Delta E}{m_p \cdot K^2} \cdot R$

La perturbazione che **una data energia** produce sull'equilibrio di uno spazio rotante aumenta quindi con la distanza dal centro e con la **diminuzione** della velocità di equilibrio.

Studiando l'evoluzione dei sistemi legati (Art.24.2), abbiamo visto che con un eccesso di energia ΔE **,** rispetto al valore associato all'equilibrio sull'orbita circolare, l'equilibrio si rende possibile su **un'orbita ellittica** con eccentricità

data da : $$e = \sqrt{\frac{\Delta E}{E_{cn}}}$$

perielio : $R_{min} = \frac{R_n}{1 + e}$; **afelio** : $R_{max} = \frac{R_n}{1 - e}$

e le caratteristiche orbitali diventano :

$$R = \frac{R_n}{\left(1 - e^2\right)} \quad ; \quad T = \frac{T_n}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad V = V_n \cdot \sqrt{1 - e^2}$$

L'energia cinetica (**di legame**) **si riduce a** : $E = E_{cn} \cdot \left(1 - e^2\right)$

Si noti che queste caratteristiche orbitali rappresentano i valori medi, perchè in realtà la massa oscilla attorno al valore del semiasse maggiore dell'ellisse con periodo T **e con un valore dell'energia cinetica variabile con legge sinusoidale**, che raggiunge il valore massimo al perielio e minimo all'afelio.

La legge fondamentale $V^2 \cdot R = K^2$ **è verificata solo con i valori medi e non su tutta l'orbita**.

2293

Al perielio la massa in orbita possiede **un'energia totale** maggiore di quella associata alla condizione di equilibrio e quindi si sposta verso l'esterno, **con trasferimento di energia allo spazio rotante** fino all'afelio, dove l'energia totale risulta minore di quella di equilibrio e quindi inizia a riassorbire energia

dallo spazio avvicinandosi al centro fino al perielio, dove il ciclo si ripete. Questo continuo **scambio di energia** tra la massa in moto e lo spazio fisico, con oscillazione del raggio orbitale, è causa di un irraggiamento che porta a una graduale riduzione del raggio e dell'eccentricità dell'orbita.

L'eccesso di energia ΔE che abbiamo fornito si conserva quindi nel sistema come "**energia di eccitazione**", scambiata continuamente tra spazio fisico e massa in moto sull'orbita.

L'energia totale della massa in equilibrio vale :

$$E_t = E_{cn} + E_{pn} = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot V_n^2 - m_n \cdot \frac{K^2}{R_n} = -\frac{1}{2} \cdot m_n \cdot V_n^2$$

D'altra parte, essa verifica anche **la legge fondamentale** $V_n^2 \cdot R_n = K^2$,

che si può anche scrivere : $V_n^2 = \frac{K^2}{R_n}$

$$\frac{1}{2} \cdot V_n^2 + \frac{1}{2} \cdot V_n^2 = \frac{K^2}{R_n} \quad ; \quad \frac{1}{2} \cdot V_n^2 = -\frac{1}{2} \cdot V_n^2 + \frac{K^2}{R_n}$$

moltiplicando per la massa, si ottiene :

$$-\frac{1}{2} \cdot m_n \cdot V_n^2 = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot V_n^2 - m_n \cdot \frac{K^2}{R_n}$$

che coincide proprio con il bilancio energetico $E_t = E_{cn} + E_{pn}$
con l'energia totale crescente con il raggio dell'orbita.

A questo punto osserviamo anche che le caratteristiche orbitali delle masse in equilibrio negli spazi rotanti **non dipendono dalla massa inerziale**.

2294

E’ possibile quindi avere lo stesso equilibrio con qualsiasi valore della massa in orbita. Quando viene fornita l’energia ΔE alla sfera in equilibrio sull’orbita, è sempre possibile verificare il principio di conservazione dell’energia con un aumento della massa inerziale.

Dato che lo spazio rotante, **per manifestare la sua inerzia**, **deve trasferire alla sfera planetaria una massa inerziale crescente con il raggio della orbita**,**dunque crescente con l’energia totale della massa in moto sulla orbita**, **il problema viene risolto se il valore della massa inerziale che lo spazio rotante trasferisce alla sfera planetaria risulta proporzionale al valore dell’energia totale ad essa associata**.

In termini differenziali, possiamo dunque scrivere una relazione del tipo :

$$dm = \alpha \cdot dE_t$$

con la costante α da determinare.

Secondo tale relazione, **l’intervallo di definizione della massa inerziale coincide con quello in cui è definita l’energia totale della materia**.

Con riferimento allo spazio rotante in cui la materia si muove, teoricamente si ha :

$$E_t = E_c + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

con $0 < R < \infty$ e quindi $-\infty < E_t < \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_\infty^2 = 0$.

In realtà, avendo noi **come limite di velocità osservabile quella della luce**, **la prima orbita stabile osservabile sarà quella sulla quale la velocità di equilibrio coincide con quella della luce**, **che ha raggio** $r_1 = \frac{K^2}{C_l^2}$.

L’intervallo di definizione, fisicamente significativo, diventa : $r_1 < R < \infty$.
Integrando tra $E_t = 0$ e il generico valore E_t e **indicando con** m_0 **il valore della massa associata a** $E_t = 0$, si ha : $m = m_0 + \alpha \cdot E_t$
e quindi :

$$m = m_0 + \alpha \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot V^2 - m_0 \cdot \frac{K^2}{R} \right)$$

2295

da cui : $$m = m_0 \cdot \left[1 + \alpha \cdot V^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{K^2}{V^2 \cdot R} \right) \right]$$

e, sostituendo $V^2 \cdot R = K^2$, per una massa in equilibrio, diventa :

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot V^2}{2} \right) = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{K^2}{R} \right)$$

Questa relazione fornisce il valore della massa inerziale che lo spazio rotante trasferisce alla materia in equilibrio sulle orbite .

All'interno di uno spazio rotante, se si trasferisce alla massa in moto l'energia ΔE , **la reazione inerziale ripristina l'equilibrio** con un aumento del raggio dell'orbita che si realizza nel rispetto della legge $V_n^2 \cdot R_n = K^2$ e quindi con una riduzione della velocità, quindi dell'energia cinetica, ed un aumento della energia potenziale uguale al doppio della cinetica.

Quasi tutta l'energia ΔE che è stata fornita viene così immagazzinata come energia potenziale e la perturbazione prodotta sull'equilibrio risulta quindi relativamente piccola e quindi modesto sarà anche l'aumento richiesto della massa inerziale.

Proprio perchè l'energia fornita ΔE viene immagazzinata praticamente tutta come energia potenziale, **entro il raggio d'azione di uno spazio rotante**, **e in particolare nel nucleo atomico**, **non si manifestano effetti relativistici**.

Quando si giunge sul confine dello spazio rotante, **con** $R \rightarrow \infty$, **l'energia potenziale tende a zero** e quindi una ulteriore fornitura di energia ΔE **non ha alcuna possibilità di essere compensata e dovrà necessariamente** trasformarsi tutta in energia cinetica.

L'incremento della massa inerziale si dovrà quindi scrivere :

$$dm = \alpha \cdot dE_c = \alpha \cdot d\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \right)$$

2296

da cui si ottiene : $$m = m_0 \cdot \frac{1}{1 - \alpha \cdot \frac{V^2}{2}}$$

che si applica a una massa alla distanza dal centro $R \rightarrow \infty$, **dunque indipendente dallo spazio rotante**.

Si tenga presente che le due espressioni che abbiamo ricavato **presentano delle analogie solo formali**, **ma descrivono situazioni diverse**.

La prima si applica a una massa che percorre un'orbita chiusa in uno spazio rotante **e ci fornisce una massa inerziale che aumenta con il diminuire della velocità**.

La seconda si applica invece a una massa libera, che s'intende in moto nello spazio rotante sull'orbita di raggio $R \rightarrow \infty$, **dove la velocità di equilibrio è uguale a zero** e dunque una massa in equilibrio è nella condizione di quiete.

In questo caso **l'eccesso di energia rispetto alla condizione di equilibrio è uguale a tutta l'energia cinetica e la perturbazione che viene indotta sull'equilibrio risulta piuttosto elevata e si manifestarà con un elevato valore della massa inerziale**.

Tra le due relazioni **non esiste però nessuna discontinuità**, perchè sono entrambe descritte dalla relazione $dm = \alpha \cdot dE_t$
che, integrata diventa :

$$m = m_0 + \alpha \cdot E_t$$

Se si indica con E_e l'energia che viene fornita alla massa dall'esterno la sua energia totale sarà, **in qualsiasi punto**, espressa dalla realzione :

$$E_t = E_{min} + E_e = E_{r_1} + E_e = -\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2 + E_e$$

abbiamo quindi :

$$m = m_0 + \alpha \cdot \left(E_e - \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2 \right)$$

2297

e la massa inerziale risulta sempre crescente con l'energia totale, **anche se non è sempre crescente con la velocità**.

Entro tutto il raggio d'azione dello spazio rotante si ha infatti :

– Per $E_e = 0 \quad \rightarrow \qquad m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{2} \cdot C_l^2 \right)$

– Per $E_e = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2 \quad \rightarrow \qquad m = m_0$

A questa condizione corrispondono le caratteristiche di equilibrio orbitale :

$$E_t = 0 \quad ; \quad E_c = 0 \quad ; \quad E_p = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad R \rightarrow \infty$$

Oltre questo punto di equilibrio, una ulteriore fornitura di energia esterna alla massa in equilibrio (in questo caso, in quiete) **si dovrà necessariamente trasformare in energia cinetica**. In ogni istante l'energia complessivamente fornita sarà : $E_e = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$

dove il primo termine rappresenta l'energia che è stata fornita per portare la massa dal livello minimo $E_{tmin} = -\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$, associato all'orbita di raggio r_1 , al valore $E_t = 0$ corrispondente a $R \rightarrow \infty$.

Per $R \rightarrow \infty$, l'energia totale della massa in moto sarà : $E_t = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$

– Per $E_e > \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$ si avrà quindi : $m = m_0 + \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$

la massa inerziale risulta : $m = m_0 \cdot \dfrac{1}{1 - \alpha \cdot \dfrac{V^2}{2}}$

– Per $0 \leq E_e \leq \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$ abbiamo ricavato l'espressione :

2298

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot V^2}{2} \right)$$

Queste relazioni mettono in evidenza che **non è sempre vero che la massa inerziale aumenta con la velocità**, **mentre è sempre vero che aumenta con il valore dell'energia fornita dall'esterno sotto qualunque forma e "rappresenta una manifestazione dell'inerzia dello spazio rotante" che dipende dal punto considerato**.

Questo aumento si ottiene indipendentemente dagli effetti relativistici, che non sono stati presi in considerazione per ricavare le due espressioni. **Esse "non sono dunque da confondere" con quella nota della massa relativistica**.

Un altro aspetto importante che l'analisi che abbiamo fatto mette in evidenza è la non corretta interpretazione che normalmente viene data della relazione, certamente tra le più note al mondo : $C_l^2 \cdot dm = dE$

che coincide con quella da noi considerata, con $\alpha = \frac{1}{C_l^2}$.

La relazione viene utilizzata come una vera e propria identità ed **interpretata come equivalenza tra massa inerziale ed energia nel senso che massa inerziale ed energia** (sotto qualsiasi forma) **sono fisicamente ritenute la stessa cosa**, **potendosi trasformare una nell'altra**.

Spesso si assume nei calcoli $C_l = 1$ e si discute di massa utilizzando l'unità di misura dell'energia, senza fare alcuna distinzione concettuale. S'introduce così una nuova forma di energia detta **energia di massa** : $E_m = C_l^2 \cdot m$ e rappresenta il valore di energia che si ottiene trasformando tutta la massa. In questo senso la massa non presenta più alcun legame con l'inerzia.

L'interpretazione che abbiamo dato con la nostra analisi è sostanzialmente diversa.

Nella nostra teoria la massa inerziale **rappresenta una caratteristica che** lo spazio rotante **trasferisce alla massa in moto**, **e quest'ultima all'operatore**, **per opporsi a una perturbazione delle condizioni di moto indotta sulla massa imponendo dall'esterno una variazione della sua energia totale** E_t .

2299

La massa inerziale non è dunque una caratteristica propria della materia, ma dipende dal punto dello spazio fisico occupato.
Se si sottrae energia si riduce la distanza dal centro dello spazio rotante con aumento dell'energia di legame.

In queste condizioni, **a parità di valore dell'energia ricevuta**, **la massa presenta ha una minore capacità di perturbare l'equilibrio** (**più stabile**) **e dunque le verrà trasferita una massa inerziale minore**.

Si tratta ora di fissare il valore della costante α in base ai limiti di variabilità del valore della massa inerziale.

Il valore minimo si ha sull'orbita con raggio minimo r_1, **la prima accessibile**, sulla quale la velocità di equilibrio è uguale a quella della luce e quindi è solo su quest'orbita **che ha significato fisico** parlare di massa inerziale minima e si ottiene :

$$m_{min} = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot C_l^2}{2} \right)$$

Per ricavare il valore massimo, osserviamo che, se forniamo l'energia ΔE_e **a una massa in equilibrio sull'orbita** $R \rightarrow \infty$, si dovrà trasformare tutta in energia cinetica, e quindi dovrà essere :

$$\Delta E_e = \Delta E_c = \Delta\left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \right) = m \cdot V \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \cdot V^2 \cdot \Delta m$$

e per la massa si avrà :

$$m = m_0 + \alpha \cdot \left(m \cdot V \cdot \Delta V + \frac{1}{2} \cdot V^2 \cdot \Delta m \right)$$

Per bassi valori della velocità, fornendo alla massa l'energia ΔE_e otteniamo un incremeto dell'energia cinetica ΔE_c dello stesso valore, formato dai due contributi indicati, con il primo molto più elevato del secondo, in quanto si ha una piccola variazione della massa mentre l'aumento della velocità è elevato.

Se consideriamo la velocità della luce come **valore massimo osservabile**, man mano che ci si approssima a questo valore gli incrementi della velocità ΔV si riducono e dovranno tendere a zero per $V \rightarrow C_l$.

2300

In queste condizioni **il primo termine si mantiene praticamente costante**, anche se si continua a fornire energia dall'esterno, mentre, dovendo essere sempre $\Delta E_c = \Delta E_e$, il secondo aumenta notevolmente **con incremento notevole della massa** Δm**.**

A questo punto si ha infatti : $\Delta E_e = \Delta E_c \simeq \frac{1}{2} \cdot C_l^2 \cdot \Delta m$

Per ricavare l'espressione della massa **che verifica il limite della velocità della luce**, consideriamo che, qualunque forma abbia, per $V << C_l$ deve ridursi alll'espressione che abbiamo ricavato trascurando questo limite.

A questo punto notiamo che, considerando lo sviluppo in serie di Taylor :

$$\sqrt{1 - \alpha \cdot V^2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot V^2 - \frac{1}{8} \cdot \alpha^2 \cdot V^4 \;.............$$

i primi due termini **coincidono con il denominatore** dell'espressione della massa che abbiamo ricavato per $V << C_l$ e quindi possiamo assumere lo sviluppo completo per esprimere la massa per qualsiasi valore della velocita.
Avremo quindi :
– per una massa legata :

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{\alpha \cdot V^2}{2} \right) \qquad \text{Per } 0 \le E_e \le \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$$

– per una massa libera :

$$m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha \cdot V^2}} \qquad \text{Per } E_e > \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$$

Dovendo assumere la massa valore reale , in tutto l'intrvallo $0 \le V \le C_l$,

sarà necessario assumere $\alpha \le \frac{1}{C_l^2}$.

Se si continua a fornire energia E_e , dovrà essere : $\lim_{E_e \to \infty} V = C_l$

per il principio di conservazione, si ha $E_e = E_c$ e quindi :

2301

$\lim_{E_e \to \infty} E_c = \infty$ da cui deriva : $m = \lim_{E_c \to \infty} \dfrac{2 \cdot E_c}{C_l^2} = \infty$

dalla seconda espressione si ottiene : $\alpha = \dfrac{1}{C_l^2}$

Avremo dunque le espressioni definitive :

– per una massa legata :

$$m = m_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{V^2}{C_l^2} \right) \qquad \text{Per } 0 \leq E_e \leq \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$$

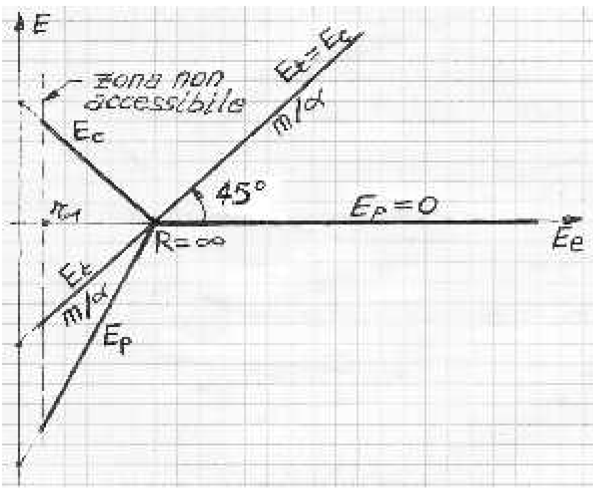
– per una massa libera si ha la nota espressione della **massa relativistica** :

$$m = m_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{V^2}{C_l^2}}} \qquad \text{Per } E_e > \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot C_l^2$$

Dalla prima espressione, per $V = C_l$, in corrispondenza dell'orbita minima

si ottiene il valore minimo della massa inerziale : $m_{min} = \dfrac{m_0}{2}$.

Le situazioni che abbiamo esaminato possono essere chiarite riportando su un diagramma cartesiano l'energia della massa in moto in funzione di quella fornita dall'esterno.



2302

A questo punto risulta chiaro che non è possibile legare **in maniera univoca la massa inerziale di una massa in moto alla sua velocità**, in quanto non si tratta di una sua caratteristica intrinseca, ma ha origine nello spazio rotante in rapporto al punto occupato.

Si hanno quindi situazioni in cui "**lo spazio rotante assegna**" alla massa in moto una massa inerziale che aumenta con la velocità ed altre nelle quali la massa inerziale assegnata aumenta a fronte di una riduzione della velocità.

La variabilità della massa inerziale è dunque un effetto generato solo dalla struttura e dalle leggi che reggono lo spazio fisico, **organizzato come uno spazio rotante**.

La sola relazione valida in qualsiasi punto dello spazio fisico, dall'atomo agli spazi astronomici, è :

$$m = m_0 + \frac{1}{C_l^2} \cdot E_t$$

Generalmente essa viene scritta in forma differenziale : $\Delta E = C_l^2 \cdot \Delta m$

ed "è universalmente interpretata come una identità" e letta come equivalenza tra massa ed energia, **trasformabili secondo la reazione** :

$$\Delta E \rightleftarrows C_l^2 \cdot \Delta m$$

Secondo questa reazione, se a una massa m forniamo la quantità di energia ΔE , sotto qualsiasi forma, la sua massa aumenta della quantità Δm indicata dalla reazione. Viceversa, se si sottrae l'energia ΔE , la massa diminuisce della stessa quantità Δm.

Se, per esempio, abbiamo un blocco di ferro che a una data temperatura ha una massa uguale a m e forniamo un'energia termica ΔE_e la temperatura aumenta e con essa anche la massa che si rileva con qualsiasi misurazione.

Se ora si sottrae energia, riportando il blocco alla temperatura iniziale, la sua massa diminuisce, ritornando al valore iniziale m e anche questa riduzione è verificabile sperimentalmente.

Difronte a questi esperimenti, ma soprattutto **difronte alle reazioni nucleari** che verificano sempre la relazione, la più semplice **interpretazione è quella**

che riflette i risultati rilevati :

La massa e l’energia sono equivalenti in quanto "rappresentano la stessa caratteristica della materia, che viene solo rilvata in due modi diversi".

Parlare dunque di massa o di energia della materia è la stessa cosa.
Nell’esempio che abbiamo citato, **la grandezza che trasferiamo al blocco la rileviamo come energia**.

Dopo il trasferimento, rilevando un aumento della massa " riconosciamo " in esso l’energia che avevamo trasferito e come prova **esiste la possibilità di realizzare il processo inverso**.

La conclusione è una sola :
L’energia si trasforma in massa inerziale e viceversa. Dunque, i due principi di conservazione della massa e dell’energia non possono più essere distinti, ma debbono **confluire in uno solo**, in quanto, quando in un processo fisico "scompare" energia compare massa inerziale.

Questa interpretazione è solo apparentemente corretta, in quanto **per poter affermare che l’aumento della massa inerziale rilevato è stato generato dalla trasformazione dell’energia**, **non è sufficiente rilevare la massa iniziale e finale**, **per misurare l’incremento**, **ma si deve anche rilevare la energia totale del blocco prima e dopo il trasferimento**, **per verificare che sia rimasta invariata**, **altrimenti non è possibile affermare che si è realmente verificata la trasformazione**.

Se procediamo a questa verifica, scopriamo che non si è verificato nessuna trasformazione.
L’energia termica che abbiamo fornito ha eccitato gli elettroni atomici che si sono allontanati dai rispettivi nuclei, trasformando l’energia ricevuta in energia potenziale.

A ciascun elettrone, nella nuova posizione, lo spazio rotante atomico associa una massa più elevata, che noi rileviamo su tutto il blocco.

Se si considera il sistema formato dall’agente che trasferisce l’energia e la massa che la riceve, l’energia totale si conserva durante il trasferimento e in effetti possiamo verificare che riportando gli elettroni nella posizione iniziale, restituiscono l’energia ricevuta e riducono la massa associata.

2304

Questo non vuol dire che l'uso che viene fatto della relazione non sia corretto. Nei calcoli funziona però perfettamente.
Semplicemente non c'è trasformazione, ma siamo noi che misuriamo l'energia dopo la reazione, attraverso l'incremento di una caratteristica che il trasferimento di energia ha prodotto in maniera proporzionale, la massa inerziale.

Energia e massa inerziale sono due grandezze interdipendenti, quindi relazionate fisicamente, ma concettualmente molto lontane.
La relazione che le lega è :

$$m = m_0 + \frac{1}{C_l^2} \cdot \left(E_c + E_p\right)$$

Questa espressione ha validità assolutamente generale e **non ha nessuna relazione con gli effetti previsti dalla teoria della relatività.**
Essa rappresenta la definizione di massa inerziale e ne indica l'origine.

Normalmente essa viene interpretata nello spazio libero, indipendente dallo spazio rotante, **trascurando l'energia potenziale** E_p , e questo fa nascere qualche incoerenza.

Se nell'espressione della massa poniamo $E_c = 0$, otteniamo :

$$m = m_0 + \frac{1}{C_l^2} \cdot E_p = m_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{C_l^2} \cdot \frac{K^2}{R}\right)$$

che indica il valore della massa inerziale di **un corpo in quiete, in un punto qualsiasi dello spazio fisico**, non necessariamente alla distanza $R \to \infty$ dal centro dello spazio rotante.

Se siamo in presenza di uno spazio rotante la massa di riposo m non è una costante caratteristica della materia considerata, ma varia con il punto dello spazio occupato.

La situazione che abbiamo considerato è la più comune nella nostra esperienza quotidiana ed è quella nella quale è maturato il concetto di massa inerziale.

La relazione descrive la massa inerziale di un corpo **non in equilibrio** nello

2305

spazio rotante, al quale viene fornita energia potenziale variando la distanza dal centro, senza variare la velocità.
Se la distanza dal centro dello spazio rotante varia di ΔR , la massa subirà

la variazione : $$\Delta m = \frac{1}{C_l^2} \cdot \Delta E_p$$

Dato che le condizioni di moto non sono cambiate e l'unica azione presente sul corpo è quella esercitata dallo spazio fisico nel quale esso si trova, si può essere certi che la massa Δm è stata trasferita al corpo dallo spazio fisico.

In base a questa osservazione, prima ancora di parlare di energia, possiamo certamente dire che "**lo spazio fisico trasferisce alla materia una massa inerziale dipendente dal punto da essa occupato**".

La situazione che abbiamo descritto è la più comune nella nostra esperienza quotidiana è rappresenta quella in cui è maturato il concetto di **inerzia come tendenza naturale della materia ad opporsi a un'azione che "tende ad accelerarla". Quantitativamente**, **questa tendenza viene espressa dal valore della massa inerziale**.

Se ora alla massa considerata forniamo un'energia cinetica E_c (positiva), la sua azione è contraria a quella dello spazio rotante, per cui essa ha tendenza ad allontanarsi dal centro e l'espressione della massa inerziale che rileviamo

risulta : $$m = m_0 + \frac{1}{C_l^2} \cdot E_t \qquad \text{con} \quad E_t = E_c + E_p$$

Quando l'energia fornita uguaglia l'energia potenziale, si ha : $E_c = E_p$

ossia : $$\frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot V^2 = \left| m_0 \cdot \frac{K^2}{R} \right| = \left| m_0 \cdot V_{eq}^2 \right|$$

da cui $$V = \sqrt{2} \cdot V_{eq} = V_f = \textbf{velocità di fuga}$$

la massa in moto si sposta sull'orbita di confine $R \to \infty$, dove si verifica la condizione $E_{t\infty} = E_c + E_p = 0$ e quindi si ottiene $m_\infty = m_0$.

Il valore della massa m_0 in realtà non rappresenta la massa inerziale rilevata

2306

in quiete, ma in quiete sull'orbita di confine dello spazio rotante, con $E_{t\infty} = \mathbf{0}$. Sarebbe quindi più opportuno denominarla **massa di confine**.

Dato che sul confine è sempre $E_p = \mathbf{0}$, l'espressione della massa inerziale diventa :

$$m = m_0 + \frac{1}{C_l^2} \cdot E_t \quad \text{e sarà} \quad E_t = E_c + E_p = E_c$$

E' da rilevare che, pur essendo l'energia totale coincidente **numericamente** con il valore dell'energia cinetica, essendo uguale a zero l'energia potenziale, questa particolare circostanza non ci puo autorizzare a modificare il significato del fattore E_t che compare nella relazione.

Essa va dunque scritta :

$$m \cdot C_l^2 = m_0 \cdot C_l^2 + E_t$$

da cui deriva :

$$E_t = E_c = m \cdot C_l^2 - m_0 \cdot C_l^2$$

Considerando il limite della velocità della luce , possiamo sostituire la massa relativistica ed abbiamo :

$$E_c = m \cdot C_l^2 - m_0 \cdot C_l^2 = m_0 \cdot C_l^2 \cdot \left(\gamma - 1\right)$$

A questo punto osserviamo che la quantità $\left(m_0 \cdot C_l^2\right)$ **è uguale all'energia potenziale della materia in equilibrio sull'orbita minima di raggio** r_1, che coincide con l'energia totale (cinetica più potenziale) che bisogna fornire **per raggiungere la velocità di fuga** dall'orbita che porta la materia considerata dalla prima orbita accessibile di raggio r_1 a quella di confine $R \to \infty$ con un aumento della massa fino al valore m_0 .

In definitiva questo termine rappresenta il valore di energia totale $E_{t\infty}$ che si deve fornire per "**creare**" la massa m_0 in equilibrio sull'orbita di raggio R_∞, ossia per avere la massa m_0 libera in quiete.

Se a questo punto alla massa in equilibrio viene fornita, sotto qualsiasi forma, l'energia E_e , essa verrà immagazzinata tutta come energia cinetica con un incremento della velocità da zero a V e della massa da m_0 a $m = m_0 \cdot \gamma$.

2307

L’energia che complessivamente abbiamo fornito allo spazio fisico per poter generare prima la massa m_0 **libera** e successivamente per **accelerarla** fino alla condizione indicata, risulta :

$$E_t(m\,;V) = E_{t\infty} + E_e$$

Tenendo conto che per $R \to \infty$ E_p è sempre uguale a zero, si ha $E_e = E_c$ e quindi : $E_t(m\,;V) = E_{t\infty} + E_c = m_0 \cdot C_l^2 + E_c$

ovvero : $$E_c = E_t(m\,;V) - m_0 \cdot C_l^2$$

dal confronto con : $$E_c = m \cdot C_l^2 - m_0 \cdot C_l^2$$

si ottiene : $$E_t(m\,;V) = m \cdot C_l^2 = m_0 \cdot \gamma \cdot C_l^2$$

Il prodotto $\left(m \cdot C_l^2\right)$ rappresenta dunque **l’energia che si deve spendere complessivamente per generare la materia di massa m con la velocità V, partendo da spazio fisico puro**.

La quantità $\left(m_0 \cdot C_l^2\right)$ rappresenta invece la quantità di energia che si deve spendere per generare la massa m_0 in quiete, sempre partendo da spazio fisico puro e **viene indicata come energia di massa** .

2308