

L'EQUILIBRIO UNIVERSALE
dalla meccanica celeste alla fisica nucleare

Cap.4 – giroscopio, magnetismo e forza di Lorentz

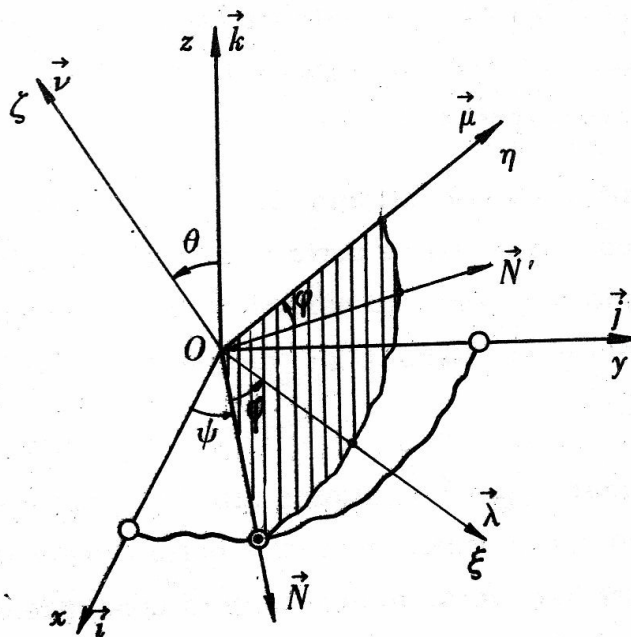
– teoria del giroscopio

Abbiamo finora preso in considerazione le condizioni di equilibrio dei sistemi legati, imponendo nello spazio fisico il principio di conservazione dell'energia solo sul piano orbitale.

Nell'universo che ci circonda si osservano però dovunque aggregati materiali rotorivolventi, variamente orientati nello spazio, i quali producono importanti e vistosi effetti giroscopici che si manifestano in tutte le direzioni.

Per un'analisi più completa dell'equilibrio dei sistemi reali non si può dunque non tenerne conto.

Noi non tratteremo la teoria generale del giroscopio, ma ci limiteremo a fare solo i richiami necessari e sufficienti per la comprensione dei processi che andremo a descrivere.



Con riferimento alla figura, consideriamo il moto di un punto materiale intorno al centro O , assunto come origine di una terna di assi cartesiani $X-Y-Z$ fissi nello spazio.

Consideriamo ancora un'altra terna di assi $\xi-\eta-\zeta$ con la stessa origine O ,

solidali con il punto P e dunque in moto con esso attorno all'origine O.

Sappiamo che, in generale, il momento angolare associato alla rotazione di un corpo di forma qualsiasi, calcolato come somma vettoriale dei momenti di tutti i suoi punti, non risulta parallelo all'asse di rotazione.

Qualunque sia la forma considerata, esistono tuttavia sempre tre assi tra loro perpendicolari tali che, se il corpo ruota attorno ad uno di essi, il momento angolare totale risulta parallelo all'asse di rotazione.

Questi assi vengono chiamati "assi principali di inerzia" ed i corrispondenti momenti di inerzia sono indicati come " **momenti principali di inerzia**".

Gli assi principali d'inerzia formano un sistema di riferimento solidale con il corpo preso in considerazione e ruota con esso.

Dato che gli assi principali d'inerzia coincidono con gli assi di simmetria dei corpi materiali e visto che nei casi reali, quasi sempre, la rotazione avviene attorno ad un asse di simmetria, esamineremo questo caso particolare.

Per poter definire l'orientamento nello spazio del punto materiale considerato, avente gli assi d'inerzia coincidenti con quelli mobili, sarà necessario riferire questi ultimi agli assi fissi.

Se consideriamo "la linea dei nodi" di versore \vec{N} , perpendicolare a entrambi gli assi OZ e $O\zeta$ e orientata nel verso del prodotto esterno $\vec{k} \wedge \vec{v}$, sarà possibile utilizzare gli angoli di Eulero, definiti come segue.

angolo di precessione ψ :

$\psi = \widehat{XON}$ è l'angolo di cui deve ruotare l'asse OX per poter coincidere con la linea dei nodi $O\vec{N}$, attraverso una rotazione antioraria rispetto ad un osservatore parallelo e concorde con l'asse OZ . Tale angolo può assumere qualunque valore positivo o negativo.

angolo di nutazione ϑ :

$\vartheta = \widehat{ZO\zeta}$ è l'angolo formato dagli assi OZ e $O\zeta$, che, per definizione, è compreso tra 0 e π .

angolo di rotazione propria φ :

$\varphi = \widehat{N\vec{O}\zeta}$ è l'angolo di cui deve ruotare la linea dei nodi, di versore \vec{N} , per portarsi a coincidere con l'asse $O\zeta$, attraverso una rotazione antioraria rispetto ad un osservatore parallelo e concorde con l'asse $O\zeta$.

Anche questo angolo può assumere qualunque valore positivo o negativo.

In base a queste definizioni, risulta : $\vec{k} \wedge \vec{v} = \vec{N} \cdot \text{sen}\vartheta$

Possiamo, a questo punto, esprimere la rotazione istantanea $\vec{\omega}$ in funzione degli angoli di Eulero, osservando che la posizione generica assunta dalla terna di assi mobili $O\xi\eta\zeta$, caratterizzata da tre valori arbitrari degli angoli di Eulero ψ, ϑ, φ , può essere pensata ottenuta a partire dalla terna fissa $Oxyz$, mediante **tre successive rotazioni attorno ad assi concorrenti nello stesso punto fisso O , in ciascuna delle quali varia uno solo dei suddetti angoli di Eulero**. Si avrà dunque :

Una prima rotazione $\vec{\omega}_1 = \dot{\psi} \vec{k}$ attorno all'asse fisso Oz .

Questa operazione lascia l'asse $O\zeta$ coincidente con l'asse Oz mentre porta $O\xi$ a coincidere con la linea dei nodi.

L'asse $O\eta$ verrà ad assumere di conseguenza una ben precisa posizione sul piano fisso Oxy , ruotata dello stesso angolo ψ rispetto all'asse Oy .

Una seconda rotazione $\vec{\omega}_2 = \dot{\vartheta} \vec{N}$ attorno alla linea dei nodi \vec{N} , che lascia l'asse $O\xi$ coincidente con la linea dei nodi e porta l'asse $O\zeta$ nella sua posizione finale.

L'asse $O\eta$ verrà ad assumere di conseguenza una ben precisa posizione nel piano delle rette Oz e $O\zeta$, che in figura abbiamo caratterizzato con il versore \vec{N} .

una terza rotazione $\vec{\omega}_3 = \dot{\varphi} \vec{v}$ attorno all'asse $O\zeta$, che porta gli assi $O\xi$

ed $O\eta$ ad assumere le loro rispettive posizioni finali, caratterizzate dai due vettori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ contenuti nel piano passante per l'origine O e parallelo ai due vettori \vec{N} e \vec{N}^* e ruotati, rispetto a questi ultimi, dello stesso angolo φ .

Le tre rotazioni, concorrenti in O che abbiamo indicato si compongono così nell'unica rotazione :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\vartheta} \vec{N} + \dot{\varphi} \vec{v}$$

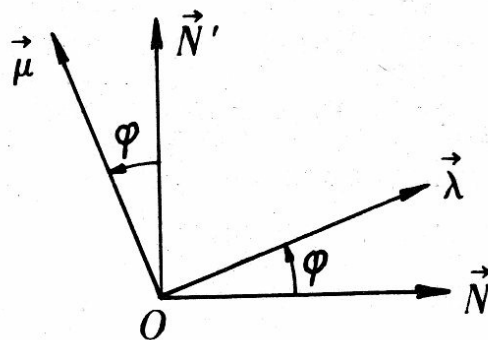
Le componenti della rotazione istantanea $\vec{\omega}$ secondo gli assi mobili solidali con il corpo considerato $O\xi\eta\zeta$ è dato dai prodotti scalari :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} = \vec{\omega} \times \vec{\lambda} \\ \mathbf{q} = \vec{\omega} \times \vec{\mu} \\ \mathbf{s} = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{array} \right\}$$

Per raggiungere il nostro scopo, calcoliamo, a questo punto, separatamente il contributo che viene fornito a \mathbf{p} , \mathbf{q} , \mathbf{s} dalle tre rotazioni $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$, $\vec{\omega}_3$.

Per quanto riguarda $\vec{\omega}_1$, conviene realizzare una scomposizione preliminare secondo le direzioni dei vettori \vec{N} e \vec{v} , complanari con essa :

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\psi} \vec{k} = \dot{\psi} \cdot \left(\text{sen}\vartheta \vec{N}^* + \text{cos}\vartheta \vec{v} \right)$$



con riferimento alla figura, scomponiamo ora il primo termine $\text{sen}\vartheta \vec{N}^*$ secondo le direzioni $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$, che sono complanari con esso :

$$\text{sen}\vartheta \vec{N}^* = \text{sen}\vartheta \cdot (\text{sen}\varphi \vec{\lambda} + \text{cos}\varphi \vec{\mu})$$

in definitiva si ha quindi :

$$\vec{\omega}_1 = \dot{\psi} \vec{k} = \dot{\psi} \cdot (\text{sen}\vartheta \cdot \text{sen}\varphi \vec{\lambda} + \text{sen}\vartheta \cdot \text{cos}\varphi \vec{\mu} + \text{cos}\vartheta \vec{v})$$

Riguardo alla rotazione $\vec{\omega}_2$ conviene scomporla secondo le direzioni dei due versori $\vec{\lambda}$ e $\vec{\mu}$ che risultano complanari con essa :

$$\vec{\omega}_2 = \dot{\vartheta} \vec{N} = \dot{\vartheta} \cdot (\text{cos}\varphi \vec{\lambda} + \text{sen}\varphi \vec{\mu})$$

La terza rotazione $\vec{\omega}_3$ non necessita di alcuna scomposizione e risulta :

$$\vec{\omega}_3 = \dot{\varphi} \vec{v}$$

si hanno dunque le componenti :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p} = \dot{\psi} \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \text{sen}\varphi + \dot{\vartheta} \cdot \text{cos}\varphi \\ \mathbf{q} = \dot{\psi} \cdot \text{sen}\vartheta \cdot \text{cos}\varphi - \dot{\vartheta} \cdot \text{sen}\varphi \\ \mathbf{s} = \dot{\psi} \cdot \text{cos}\vartheta + \dot{\varphi} \end{array} \right.$$

In alcuni problemi può risultare comodo calcolare le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna di versori $\vec{N}, \vec{N}^*, \vec{v}$, anche se essa non è solidale con il sistema rigido in esame.

Indicando queste componenti con $\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*, \mathbf{s}^*$, si avrà :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^* = \vec{\omega} \times \vec{N} \\ \mathbf{q}^* = \vec{\omega} \times \vec{N}^* \\ \mathbf{s}^* = \vec{\omega} \times \vec{v} \end{array} \right.$$

Sostituendo le relazioni che sono state ricavate, si ottiene :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}^* = \dot{\vartheta} \\ \mathbf{q}^* = \dot{\psi} \cdot \text{sen} \vartheta \\ \mathbf{s}^* = \mathbf{s} = \dot{\psi} \cdot \text{cos} \vartheta + \dot{\varphi} \end{array} \right.$$

La rotazione istantanea $\vec{\omega}$ si potrà dunque scrivere :

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\vartheta} \vec{N} + \dot{\varphi} \vec{v} = \mathbf{p}^* \vec{N} + \mathbf{q}^* \vec{N}^* + \mathbf{s} \vec{v}$$

Il momento risultante delle quantità di moto \vec{K} rispetto al punto fisso O vale :

$$\vec{K} = I_1 \cdot \mathbf{p} \vec{\lambda} + I_2 \cdot \mathbf{p} \vec{\mu} + I_3 \cdot \mathbf{s} \vec{v} = I_1 \cdot \mathbf{p}^* \vec{N} + I_2 \cdot \mathbf{q}^* \vec{N}^* + I_3 \cdot \mathbf{s} \vec{v}$$

in cui I_1, I_2, I_3 rappresentano i momenti principali d'inerzia con i rispettivi versori $\vec{\lambda}, \vec{\mu}, \vec{v}$.

Particolarmente diffuso è il caso in cui il corpo considerato ruota attorno a un asse di simmetria I , mentre per gli altri due risulta $I_1 = I_2 = J$.

Si ha così, per il momento risultante delle quantità di moto \vec{K} , l'espressione :

$$\vec{K} = J \cdot \left(\mathbf{p}^* \vec{N} + \mathbf{q}^* \vec{N}^* \right) + I \cdot \mathbf{s} \vec{v}$$

Per ricavare la condizione di equilibrio del solido considerato, applichiamo, a questo punto, il teorema del momento risultante della quantità di moto rispetto al punto fisso O .

E' però da tener conto che la terna stereonodale non è animata dalla velocità di rotazione $\vec{\omega}$, ma dalla :

$$\vec{\omega}^* = \dot{\psi} \vec{k} + \dot{\vartheta} \vec{N} = \vec{\omega} - \dot{\varphi} \vec{v}$$

risulta dunque :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \left(\dot{\mathbf{p}}^* \vec{N} + \dot{\mathbf{q}}^* \vec{N}^* \right) + \mathbf{l} \cdot \dot{\mathbf{s}} \vec{v} + \vec{\omega}^* \wedge \vec{K}$$

$$\vec{\omega}^* \wedge \vec{K} = (\vec{\omega} - \dot{\varphi} \vec{v}) \wedge \vec{K} = \begin{vmatrix} \vec{N} & \vec{N}^* & \vec{v} \\ \mathbf{p}^* & \mathbf{q}^* & \mathbf{s} - \dot{\varphi} \\ \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}^* & \mathbf{J} \cdot \mathbf{q}^* & \mathbf{l} \cdot \mathbf{s} \end{vmatrix} =$$

$$= \left[(\mathbf{l} - \mathbf{J}) \cdot \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{s} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{q}^* \cdot \dot{\varphi} \right] \vec{N} - \left[(\mathbf{l} - \mathbf{J}) \cdot \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{s} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{p}^* \cdot \dot{\varphi} \right] \vec{N}^*$$

Il momento risultante, rispetto al punto O , delle forze esterne si potrà scrivere

$$\vec{M} = M_N \vec{N} + M_{N^*} \vec{N}^* + M_v \vec{v}$$

dovento, per avere equilibrio dinamico, soddisfare la relazione :

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{M}$$

si ricava il sistema di tre equazioni che esprime la condizione di equilibrio su

ciascuno dei tre assi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{p}}^* + \left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}) \cdot \mathbf{s} + \mathbf{J} \cdot \dot{\varphi} \right] \cdot \mathbf{q}^* = \mathbf{M}_N \\ \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}^* - \left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}) \cdot \mathbf{s} + \mathbf{J} \cdot \dot{\varphi} \right] \cdot \mathbf{p}^* = \mathbf{M}_{N^*} \\ \mathbf{I} \cdot \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_v \end{array} \right\}$$

oppure, sostituendo a \mathbf{p}^* , \mathbf{q}^* , \mathbf{s} le loro espressioni :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{J} \cdot \ddot{\vartheta} + \left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}) \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\vartheta + \mathbf{I} \cdot \dot{\varphi} \right] \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\vartheta = \mathbf{M}_N \\ \mathbf{J} \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} \cdot \sin\vartheta \right) - \left[(\mathbf{I} - \mathbf{J}) \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\vartheta + \mathbf{I} \cdot \dot{\varphi} \right] \cdot \dot{\vartheta} = \mathbf{M}_{N^*} \\ \mathbf{I} \cdot \frac{d}{dt} \left(\dot{\psi} \cdot \cos\vartheta + \dot{\varphi} \right) = \mathbf{M}_v \end{array} \right\}$$

Il caso più frequente in astronomia e in fisica atomica è quello in cui si potrà assumere :

$$\vartheta = \vartheta_0 = \text{costante}$$

$$\dot{\psi} = \omega_n = \text{velocità di rivoluzione} = \text{costante}$$

$$\mathbf{s} = \dot{\psi} \cdot \cos\vartheta + \dot{\varphi} = \omega_p = \text{velocità di rotazione} = \text{costante}$$

Si ottiene così : $\mathbf{M}_v = 0$; $\mathbf{M}_{N^*} = 0$; $\ddot{\vartheta} = \dot{\vartheta} = 0$

e quindi:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left[\mathbf{I} \cdot \dot{\varphi} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}) \cdot \dot{\psi} \cdot \cos\vartheta \right] \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\vartheta \vec{\mathbf{N}}$$

ricordando infine la relazione :

$$\vec{N} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{v}}{\text{sen}\vartheta}$$

si ha :

$$\vec{M} = \left[I \cdot \left(\dot{\psi} \cdot \text{cos}\vartheta + \dot{\varphi} \right) - J \cdot \dot{\psi} \cdot \text{cos}\vartheta \right] \cdot \dot{\psi} \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}$$

e quindi, in definitiva :

$$\vec{M} = \left[I \cdot \omega_p \cdot \omega_n - J \cdot \omega_n^2 \cdot \text{cos}\vartheta \right] \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}$$

Questa relazione è fondamentale per lo studio di qualsiasi corpo rigido rotorivolvente, in quanto descrive tutte le condizioni che consentono l'equilibrio con lo spazio fisico.

Per chiarire quanto abbiamo finora visto, consideriamo una sfera di raggio r_p rotante su se stessa con velocità periferica v_p e rivolvente con velocità V_n alla distanza R_n da un punto fisso O .

Per il momento d'inerzia si ha : $I = J = \frac{2}{5} \cdot m_p \cdot r_p^2$.

Se indichiamo con $\vec{F} = F\vec{v}$ la forza che agisce sulla sfera il suo momento rispetto al punto fisso O sarà :

$$\vec{M} = \vec{F} \wedge \vec{R} = (F \cdot R \cdot \text{sen}\vartheta) \cdot \vec{k} \wedge \vec{v}$$

La condizione di equilibrio diventa quindi :

$$F \cdot R \cdot \text{sen}\vartheta = \frac{2}{5} \cdot m_p \cdot r_p^2 \cdot \omega_n \cdot [\omega_p - \omega_n \cdot \text{cos}\vartheta]$$

Se l'asse di rotazione e quello di rivoluzione sono tra loro perpendicolari, si

ha $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ed il momento assume il valore massimo :

$$F \cdot R = \frac{2}{5} \cdot m_p \cdot r_p^2 \cdot \omega_n \cdot \omega_p$$