– Unificazione delle equazioni di Maxwell e applicazione ai campi gravitazionali.

A questo punto notiamo che nella relazione $\overrightarrow{M_1} = \overrightarrow{\omega_n} \Lambda \overrightarrow{L_p}$
la massa della particella elementare considerata compare sia al primo che al secondo membro, per cui viene eliminata e **la relazione diventa un vincolo che deve essere soddisfatto dalle grandezze vettoriali misurabili in un punto qualsiasi dello spazio fisico affinchè si possa avere l'equilibrio anche in presenza di una perturbazione esterna**.

La presenza della particella elementare non è dunque necessaria ed il discorso può essere fatto identicamente " con riferimento diretto ad un punto dello spazio fisico ".

Quello che invece risulta assolutamente necessario è la presenza del momento rotazionale $\overrightarrow{L_p}$.

Questa ultima osservazione è molto importante, in quanto ci permette di dire che :
se i punti dello spazio fisico verificano l'espressione che descrive la condizione di equilibrio, la quale richiede " che essi siano rotanti su se stessi ", vuol dire che l'ipotesi iniziale, che abbiamo posto alla base della teoria, risulta in accordo con la realtà fisica.

Abbiamo però già visto, studiando il magnetismo planetario, che è possibile generare in un punto qualsiasi dello spazio, **un vettore momento angolare** $\vec{L}$, **dei valori di modulo e direzione desiderati**, semplicemente sommando quelli di masse in orbita anche molto distanti.

Esso si manifesta nel punto considerato come una grandezza vettoriale che è stata denominata " induzione magnetica " e risulta proporzionale al valore del momento angolare complessivamente fornito dalle masse in orbita.

Per qualsiasi punto dello spazio fisico si avrà dunque una relazione del tipo :

$$\alpha \cdot \vec{L} = \vec{B}$$

con α costante da determinare.

A questo punto, il principio di conservazione del momento angolare può essere enunciato anche come principio di conservazione dell'induzione magnetica " B " in qualsiasi punto dello spazio fisico, esprimibile con un'espressione del tipo :

$$\vec{M} = \alpha \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Se la relazione è riferita allo spazio fisico puro, il vettore $\vec{B}$ rappresenta una caratteristica acquisita dall'elemento spaziale S_0, che occupa il punto dello spazio " **vuoto** " considerato.

Dato che gli elementi spaziali S_0, per definizione, ruotano su se stessi con la massima velocità osservabile, che è stata assunta uguale a quella della luce, per la continuità dello spazio e la indeformabilità degli elementi spaziali, una qualsiasi perturbazione, prodotta in un punto si propagherà agli elementi S_0 contigui con la velocità della luce (in realtà la velocità di propagazione in linea retta è C_l, **osservabile**, e quella di rotazione $\frac{\pi}{2} \cdot C_l$, non osservabile).

Indipendentemente dal fatto che sia presente o meno materia organizzata, la relazione esprime una condizione di equilibrio e come tale può essere letta da destra a sinistra oppure nel verso opposto .

A questo punto, per poter cercare un'analogia con le equazioni di Maxwell, è necessario fare alcuni richiami teorici sui principi di conservazione, che sono la base sulla quale esse si fondano.

Se abbiamo una grandezza G , additiva per definizione, l'unica maniera per poter variare la quantità g contenuta in un volume chiuso assegnato V, sarà quella di creare un flusso della grandezza G attraverso la superficie S, che delimita il volume V.

Se indichiamo con $\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})$ la densità della grandezza G nel punto **P**, interno al volume V considerato, la quantità g contenuta nel volume V sarà :

$$g = \int_{V} \delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}V$$

Supponiamo ora che alla grandezza G sia associato un campo vettoriale $\overrightarrow{G}$, che può dipendere sia dallo spazio che dal tempo.

Si definisce flusso del campo vettoriale $\overrightarrow{G}$ attraverso la superficie S il valore dell'integrale di superficie :

$$\Phi_{\mathbf{G}}(S) = -\oint_{S} \overrightarrow{G} \times \overrightarrow{n} \cdot \mathbf{d}S$$

Il flusso così definito è inteso con il significato preso dal linguaggio comune e dunque si misurerà come la quantità della grandezza G nell'unità di tempo.

Possiamo, a questo punto, mettere in relazione, la variazione della quantità g contenuta nel volume V con il flusso uscente dalla superficie che lo delimita, con la relazione :

$$\frac{dg}{dt} = \Phi_{\mathbf{G}}(S)$$

si noti che la quantità g diminuisce per flusso uscente positivo e viceversa.
Si avrà quindi :

$$\frac{d}{dt} \int_{V} \delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}V = -\oint_{S} \overrightarrow{G} \times \overrightarrow{n} \cdot \mathbf{d}S$$

ricordiamo ora che, definita la divergenza del campo vettoriale $\overrightarrow{G}$ come :

$$\nabla \cdot \overrightarrow{G} = \frac{dG_x}{dx} + \frac{dG_y}{dy} + \frac{dG_z}{dz}$$

con il teorema della divergenza, possiamo passare dall'integrale di superficie a quello di volume :

$$\oint_S \vec{G} \times \vec{n} \cdot \mathbf{d}S = \int_V \nabla \cdot \vec{G} \cdot \mathbf{d}V$$

e quindi anche :

$$\frac{d}{dt} \int_V \delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P}) \cdot \mathbf{d}V = -\int_V \nabla \cdot \vec{G} \cdot \mathbf{d}V$$

che si può dunque scrivere :

$$\int_V \frac{d\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})}{dt} \cdot \mathbf{d}V = -\int_V \nabla \cdot \vec{G} \cdot \mathbf{d}V$$

dato che l'uguaglianza deve essere verificata per qualsiasi scelta del dominio d'integrazione, dovranno essere uguali gli integrandi.

Si ottiene così la legge di conservazione, in forma differenziale :

$$\frac{d\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})}{dt} = - \nabla \cdot \vec{G}$$

In generale è possibile scrivere una relazione del tipo :

$$\nabla \cdot \vec{G} = \beta \cdot \nabla \cdot \overrightarrow{\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})}$$

dove β è una costante di proporzionalità.
e quindi abbiamo :

$$\frac{d\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})}{dt} + \beta \cdot \nabla \cdot \overrightarrow{\delta_{\mathbf{G}}(\mathbf{P})} = 0$$

All'interno della superficie S potrebbe essere presente una sorgente $s_{\mathbf{G}}$ per unità di volume ed in questo caso si produrrebbe una variazione di g anche con flusso uscente nullo.
L'equazione del bilancio, in questo caso, si modifica come segue :

$$\frac{d\delta_G(P)}{dt} + \beta \cdot \nabla \cdot \overrightarrow{\delta_G(P)} = S_G$$

e rappresenta l'espressione generale del "principio di conservazione" della grandezza g all'interno di una superficie chiusa.

Tornando ora al nostro problema, vogliamo scrivere per i campi gravitazionali equazioni analoghe a quelle di Maxwell, scritte per quelli elettromagnetici.

Se abbiamo una "carica elettrica q", il campo elettrico $\overrightarrow{K_q}$, misurabile in un punto P alla distanza R **,** ad essa associato, viene definito in modo da poter soddisfare il principio di conservazione della carica elettrica :

$$\overrightarrow{K_q} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon \cdot R^2} \cdot \vec{n}$$

Se lo spazio è isotropo, con ε costante, si ha infatti :

$$\Phi_{K_q}(S) = -\oint_S \overrightarrow{K_q} \times \vec{n} \cdot dS = \frac{q}{\varepsilon}$$

Se, all'interno della superficie chiusa S, la carica elettrica q è nulla, si ottiene

$$\Phi_{K_q}(S) = -\oint_S \overrightarrow{K_q} \times \vec{n} \cdot dS = 0$$

E' importante notare che, **il fatto che sia nullo l'integrale esteso a tutta la superficie**, **non implica che sia nullo il valore del campo elettrico in tutti i suoi punti**.

Un discorso assolutamente analogo può essere fatto in presenza di materia ordinaria avente " una massa m ".

Se Indichiamo con g la costante caratteristica del mezzo, volendo verificare il "**principio di conservazione della massa inerziale**" avremmo, in questo caso, l'analoga relazione :

$$\overrightarrow{K_m} = \frac{m}{4 \cdot \pi \cdot g \cdot R^2} \cdot \vec{n}$$

Nella teoria degli spazi rotanti abbiamo visto però che la materia esercita la sua azione attraverso la **massa attiva** K^2 e quindi, nella relazione, la massa m, che in realtà non si conserva, dovrà essere sostituita con K^2.
Si avrà quindi :

$$\Phi_{K_m}(S) = -\oint_S \overrightarrow{K_m} \times \vec{n} \cdot dS = \frac{K^2}{g}$$

dunque, se non abbiamo all'interno della superficie S, materia organizzata su qualsiasi livello di aggregazione, si avrà $K^2 = 0$ e quindi :

$$\Phi_{K_m}(S) = -\oint_S \overrightarrow{K_m} \times \vec{n} \cdot dS = 0$$

Nella teoria degli spazi rotanti vale quindi il principio di conservazione della massa attiva K^2 e non di quella inerziale m.

Inoltre, **come per i campi elettrici**, **è teoricamente possibile avere sulla superficie S punti nei quali risulta $\overrightarrow{K_m} \neq 0$** , **anche se all'interno non esiste materia generatrice dello spazio rotante K^2** .

Se $\overrightarrow{K_{m1}}$ è il campo che viene rilevato nel punto P_1, al centro dell'elemento di superficie dS_1 , il flusso uscente sarà :

$$d\Phi_{K_{m1}} = \overrightarrow{K_{m1}} \times \vec{n} \cdot dS_1$$

Dovendo essere nullo il flusso uscente totale, per ogni punto $\mathbf{P_1}$ dovrà esistere, sulla superficie S, un punto $\mathbf{P_2}$ con un valore del campo $\overrightarrow{K_{m2}}$ tale da fornire :

$$d\Phi_{K_{m1}} + d\Phi_{K_{m2}} = 0 \quad \text{e quindi :} \quad d\Phi_{K_{m2}} = -d\Phi_{K_{m1}}$$

124

Questo vuol dire che, qualunque sia il meccanismo o la perturbazione che dà origine al campo elettrico rilevato in un punto P dello spazio, esso deve avere senz'altro caratteristiche vettoriali, in modo che sappia individuare le direzioni e che, per ognuna di esse, sia capace di generare campi dello stesso valore e versi opposti.
Queste particolari caratteristiche si possono ottenere con un vettore rilevabile in un intorno del punto **P** considerato, che si manifesti con lo stesso valore su una linea chiusa che entra ed esce dalla superficie S.

Valutiamo ora la costante α prendendo in considerazione l'elettrone in orbita nell'atomo di idrogeno.
Consideriamo l'elettrone in moto equivalente alla corrente elettrica :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{q_e}{T_{11e}} = \frac{q_e \cdot V_{11e}}{2 \cdot \pi \cdot R_{11e}}$$

applicando la legge di Biot e Savart, si ricava :

$$B_e \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_{11e} = \mu \cdot \frac{q_e \cdot V_{11e}}{2 \cdot \pi \cdot R_{11e}}$$

da cui :

$$B_e = \mu_0 \cdot \frac{q_e \cdot V_{11e}}{4 \cdot \pi^2 \cdot R_{11e}^2}$$

Per il teorema di Gauss (pricipio di conservazione della carica elettrica) :

$$\oint_S \overrightarrow{K_E} \times \vec{n} \cdot dS = \frac{q_e}{\varepsilon_0}$$ da cui deriva : $$\frac{q_e}{4 \cdot \pi \cdot R_{11e}^2} = K_E \cdot \varepsilon_0$$

sostituendo, si ottiene :

$$B_e = \frac{K_E \cdot V_{11e}}{\pi \cdot C_l^2}$$

125

Il momento angolare orbitale vale :

$$L_e = m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e}$$

si ricava quindi :

$$\alpha = \frac{B_e}{L_e} = \frac{K_E}{\pi \cdot C_l^2 \cdot m_e \cdot R_{11e}}$$

A questo punto notiamo che nella definizione della corrente elettrica, la carica elettrica è inserita con un ruolo attivo.

Volendo dunque definire qualcosa di analogo, da utilizzare negli spazi rotanti,

si dovrà asumere : $$I_K = \frac{dK^2}{dt}$$

ricordando il teorema della conservazione, si ottiene :

$$I_K = g \cdot \frac{d}{dt} \oint_S \overrightarrow{K_m} \times \vec{n} \cdot \mathbf{d}S$$

si potrà dunque scrivere :

$$\oint_l \alpha \cdot \vec{L} \times \overrightarrow{\mathbf{d}l} = g \cdot \frac{d}{dt} \oint_S \overrightarrow{K_m} \times \vec{n} \cdot \mathbf{d}S$$

e quindi anche :

$$\mathbf{rot}\ \vec{L} = \frac{g}{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} \overrightarrow{K_m}$$

per analogia si può procedere anche per le altre equazioni di Maxwell .
Le equazioni verranno dimostrate in dettaglio in un altro capitolo.