– Equazioni del moto di un punto nello spazio fisico e calcolo della traiettoria a spirale percorsa dai corpi celesti

Finora abbiamo sempre considerato nell'universo la presenza di un solo spazio rotante centrale e questo ha consentito di non porre alcun limite per il suo raggio d'azione.

Abbiamo così ottenuto tutte relazioni applicabili fino a $R \rightarrow \infty$, senza alcuna discontinuità e per ogni valore di R è possibile raggiungere la condizione di equilibrio $V^2 \cdot R = K^2$.

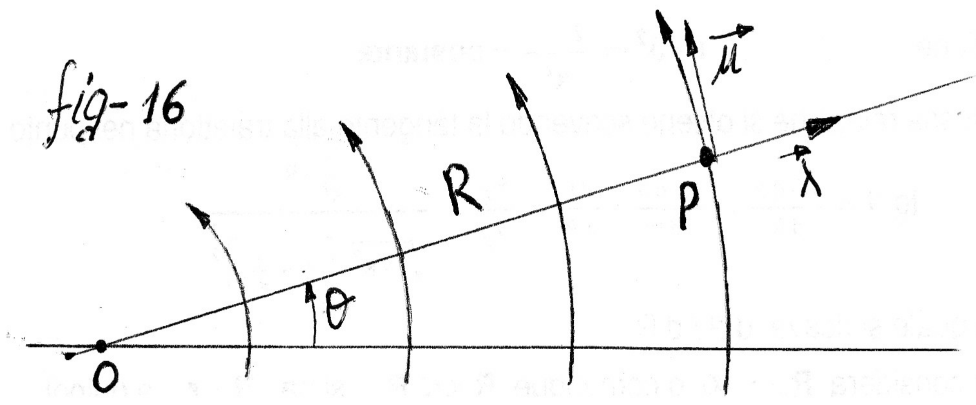
Nell'universo che realmente noi osserviamo si hanno però miliardi di spazi rotanti, organizzati secondo una gerarchia nella quale il valore del raggio d'azione di uno spazio rotante viene limitato ad un valore R_1 da quello che nell'ordine gerarchico lo precede.

Questa limitazione cambia radicalmente le condizioni di equilibrio in quanto, analogamente a quello che accade nei sistemi meccanici, per esempio in una corda elastica **fissata agli estremi**, punti di equilibrio si possono avere solo in corrispondenza di valori ben precisi della distanza dagli estremi.

Da questa limitazione deriva una quantizzazione delle orbite circolari stabili, secondo quanto è indicato dal calcolo seguente.

Facendo riferimento alla figura 16, ricaviamo dunque l'equazione del moto di un generico punto P in uno spazio rotante con centro in O.

fig- 16



In coordinate polari, le equazioni generali del moto saranno :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left[\overrightarrow{OP}\right] = \frac{d}{dt}\left[R\,\vec{\lambda}\right] = \dot{R}\,\vec{\lambda} + R \cdot \dot{\vartheta}\,\vec{\mu}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\ddot{R} - R \cdot \dot{\vartheta}^2\right]\vec{\lambda} + \left[R \cdot \ddot{\vartheta} + 2 \cdot \dot{R} \cdot \dot{\vartheta}\right]\vec{\mu} =$$

$$= \left[\ddot{R} - R \cdot \dot{\vartheta}^2\right]\vec{\lambda} + \frac{1}{R} \cdot \frac{d}{dt}\left[R^2 \cdot \dot{\vartheta}\right]\vec{\mu}$$

Essendo nullo il momento delle forze esterne applicate rispetto all'origine O, sarà :

$$\frac{d}{dt}\left[R^2 \cdot \dot{\vartheta}\right] = 0$$

e quindi si ottiene la condizione fondamentale :

$$R^2 \cdot \dot{\vartheta} = C = \textbf{costante su tutta la traiettoria}$$

si potrà dunque scrivere :

$$\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{C}{R^2}$$

essendo anche, per quanto abbiamo visto :

$$a_r = -\frac{K^2}{R^2} = \frac{dV_r}{dt} = \frac{dV_r}{dR} \cdot \frac{dR}{dt}$$

si ricava :

$$V_r \cdot dV_r = -\frac{K^2}{R^2} \cdot dR$$

che, integrata, fornisce la velocità radiale :

$$V_r = \frac{dR}{dt} = \pm\sqrt{2 \cdot K^2} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

In definitiva, si ha il sistema di equazioni differenziali del moto :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{dR}{dt} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot K^2}{R_0}} \cdot \sqrt{\dfrac{R_0}{R} - 1} \\ \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{C}{R^2} \end{array} \right\}$$

da cui si ricava l'equazione differenziale della traiettoria :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \sqrt{\frac{R_0 \cdot C^2}{2 \cdot K^2}} \cdot \frac{1}{R^2 \cdot \sqrt{\dfrac{R_0}{R} - 1}}$$

Ponendo $R_0 / R = u$, integrando e quadrando, si ottiene l'equazione della traiettoria :

$$\vartheta^2 = \frac{2 \cdot C^2}{K^2 \cdot R_0} \cdot \left[\frac{R_0}{R} - 1 \right]$$

Se si assume : $$\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} = \frac{1}{r}$$

si ottiene :

134

$$r \cdot \vartheta^2 = \frac{2 \cdot C^2}{K^2} = \text{costante}$$

La stessa relazione si ottiene scrivendo la tangente alla traiettoria :

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{R \cdot d\vartheta}{dR} = \frac{R \cdot d\vartheta}{dt} \cdot \frac{dt}{dR} = \frac{V_{\vec{\lambda}}}{V_{\vec{\mu}}} = \frac{\frac{C}{R^2} \cdot R}{\sqrt{2 \cdot K^2} \cdot \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right]^{\frac{1}{2}}}$$

dalla quale si ricava l'espressione di $\frac{d\vartheta}{dR}$.

Se si considera $R_0 \to \infty$ o comunque $R << R_0$, si ha $R \simeq r$ e quindi si ottiene l'equazione della traiettoria, fondamentale pre tutta la teoria :

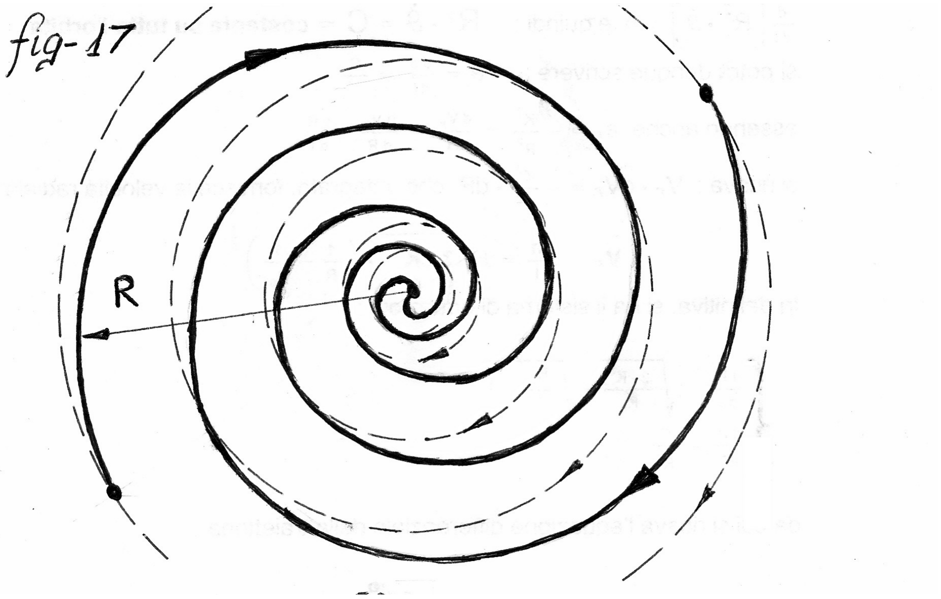
$$R \cdot \vartheta^2 = \frac{2 \cdot C^2}{K^2} = \text{costante}$$

Tale relazione rappresenta una funzione ciclica, **precisamente una spirale** .

Facciamo rilevare che la relazione è stata ricavata senza alcun riferimento al valore della massa del punto, che viene considerato come elemento spaziale. Essa ci dice dunque che :

Le linee di forza, che un aggregato materiale genera nello spazio circostante, sono delle spirali dirette verso il centro

come è indicato in figura 17.



Da quanto abbiamo finora visto, nello spazio fisico, la conservazione del momento angolare, espressa dalla relazione $V \cdot R = C =$ **costante**

e la presenza di un'accelerazione radiale $a_r = -\dfrac{K^2}{R^2}$, impongono ai punti dello spazio fisico "**una traiettoria spiraliforme**" che è descritta dalla relazione :

$$R \cdot \vartheta^2 = \frac{2 \cdot C^2}{K^2} = \textbf{costante su tutta la traiettoria}$$

per la quale la soluzione analitica prevede che si abbiano traiettorie reali **sia centripete che centrifughe**, **secondo l'orientamento della velocità radiale** :

$$V_r = \pm \sqrt{2 \cdot K^2} \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

E' dunque teoricamente possibile avere anche l'equilibrio stazionario su orbite chiuse.

136