Caratteristiche orbitali teoriche del Sistema Solare

n m q	$C_n 10^{10}$	$C_s 10^{10}$	$R_n 10^6$	$R\ 10^6$	$R_s 10^6$	**T** g	$R_N 10^6$	$R_{maxa} 10^6$	
1	2,7106	2,7106	5536	5900	5900	90474	0,491	28,1	○
$1\sqrt{\frac{4}{3}}$	2,3474	2,4425	4152	4152	4496,5	53431	29,42	335	○
$1\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}$	2,0329		3114					vuota	
$1\sqrt{2}$	1,9167	1,9471	2768	2775	2869,6	29185	21,36	212	○
$1\sqrt{2}\sqrt{\frac{4}{3}}$	1,6599		2076					Chirone	
2	1,3553	1,3749	1384	1388	1429,4	10329	25,00	199	○
$2\sqrt{\frac{4}{3}}$	1,1737		1038					vuota	
$2\sqrt{\frac{4}{3}}\sqrt{\frac{4}{3}}$	1,0165	1,0144	778,5	780,3	778,4	4353	22,30	161	○
$2\sqrt{2}$	0,9583		692,0					vuota	
3	0,9035		615,1					vuota	
$3\sqrt{\frac{4}{3}}$	0,7825		461,3					fascia	○
4	0,6776		346,0					dei	○
$4\sqrt{\frac{4}{3}}$	0,5869		259,5					pianetini	○
5	0,5421	0,5450	221,4	223,4	227,9	666,8	0,130	6,7	○
$5\sqrt{\frac{4}{3}}$	0,4695		166,0					vuota	
6	0,4517	0,4419	153,7	153,8	149,6	380,9	0,259	4,4	○
$6\sqrt{\frac{4}{3}}$	0,3912		115,2					vuota	
7	0,3872	0,3789	112,9	112,9	108,2	239,8	0,169	2,9	○
8	0,3388		86,50					vuota	
9	0,3012		68,34					vuota	
10	0,2711	0,2710	55,36	57,81	57,82	87,77	0,024	0,77	○
11	0,2464		45,75						
12	0,2259		38,44						

Le relazioni che abbiamo ricavato verranno utilizzate per poter descrivere le situazioni realmente presenti sulle singole orbite.

Bisogna tenere presente che nei calcoli abbiamo trascurato sia l'azione degli spazi rotanti di ordine superiore che l'interazione tra i diversi pianeti.

Di quest'ultimo effetto possiamo tener conto con alcune considerazioni solo qualitative.

Dal valore del raggio d'azione dei pianeti, $R_{\mathbf{maxa}}$, e dalle distanze $\Delta R_{\mathbf{n}}$ tra le orbite, si vede che risulta sempre $\Delta R_{\mathbf{n}} > R_{\mathbf{maxa}}$ e questo assicura una interazione tra i pianeti complessivamente trascurabile con una conseguente stabilità del sistema.

Per quanto riguarda l'occupazione delle orbite possibili, valgono le seguenti considerazioni.

Sappiamo che il pianeta Plutone presenta un' orbita molto eccentrica con afelio alla distanza dal Sole $R_{\mathbf{APl}} = \mathbf{7375 \cdot 10^6}\ K_m$.
Notando che tale valore si può essere ottenuto con :

$$R_0 = R_1 \cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right)^2 = 5536 \cdot 10^6\ K_m \cdot \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}} = \mathbf{7381 \cdot 10^6}\ K_m$$

possiamo pensare che il pianeta abbia abbandonato da poco tempo l'orbita circolare minima R_0 della fascia esterna per iniziare il moto nella falda spaziale successiva associata all'orbita circolare stabile di raggio minimo $R_1 = \mathbf{5536 \cdot 10^6}\ K_m$ associata al numero quantico $n = 1$, con una eccentricità iniziale :

$$e_i = \frac{R_{n-1}}{R_{Pl}} - \mathbf{1} = \frac{7381}{5900} - 1 = \mathbf{0,25}$$

dunque, anche se la prima orbita solare osservabile ha raggio medio R_{Pl}, il punto più lontano dal quale partono le masse che " **entrano** " nel sistema Solare ò R_0 .

Dall'osservazione astronomica sappiamo che tra R_0 e $\mathbf{2} \cdot R_0$ si estende una zona nella quale si muovono particelle delle più svariate dimensioni.

Questa fascia, detta di Kuiper, comprende tutte le orbite solari, più o meno stabili, che si trovano subito oltre il punto neutro tra il Sole ed il sistema stellare locale nel quale esso orbita.

Esistono attualmente molti altri piccoli corpi celesti che hanno seguito la via di Plutone, chiamati per questo Plutini, i quali abbandonano oggi l'orbita circolare minima R_1, associata a $n = 1$, per passare all'orbita successiva, associata a $\left(1 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$, iniziando dall'afelio $R_{A\sqrt{\frac{4}{3}}} = R_1 = 5536 \cdot 10^6\ K_m$.

Quando il pianeta Urano si trova all'afelio, il suo raggio d'azione si estende fino ad una distanza dal Sole pari a :

$$d_A = R_{AU} + R_{maxaU} = (3004 + 212) \cdot 10^6\ K_m = 3216 \cdot 10^6\ K_m$$

esso è quindi in grado di " **svuotare** " gradualmente l'orbita $\left(1 \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ avente raggio $R_n = 3114 \cdot 10^6\ K_m$, in corrispondenza della quale dalla osservazione astronomica non si rileva alcun corpo in orbita.

Quando Giove si trova in prossimità dell'afelio e del perielio, la sua azione attrattiva si estende fino a :

$$d_A = (816+161) \cdot 10^6\ K_m = 977 \cdot 10^6\ K_m$$

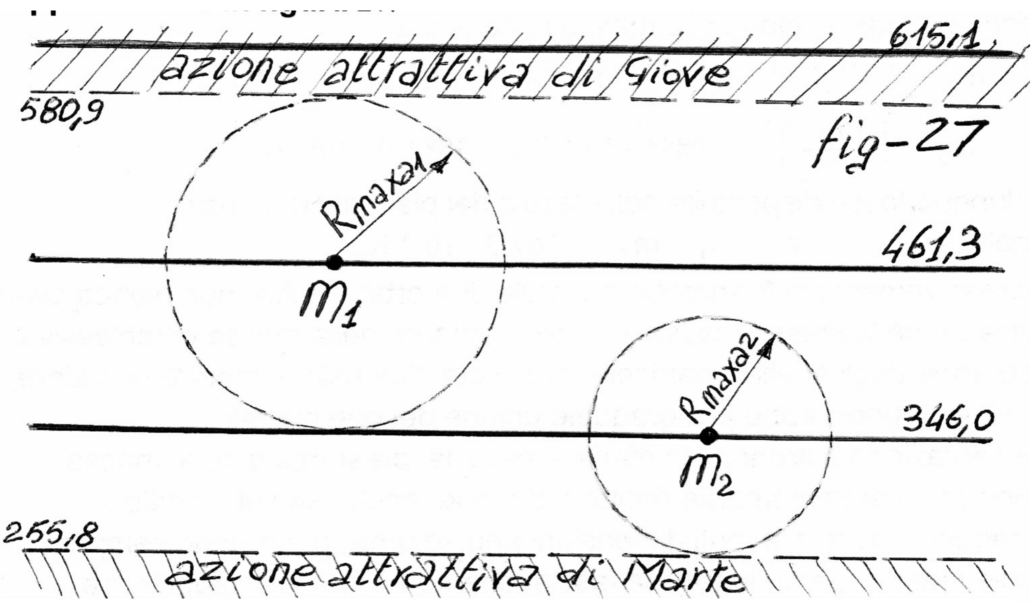
$$d_P = (741-161) \cdot 10^6\ K_m = 580 \cdot 10^6\ K_m$$

Se consideriamo l' approssimazione del calcolo, non possiamo escludere che il pianeta riesca a svuotare, in un lungo tempo, l'orbita avente raggio $R_n = 1038 \cdot 10^6\ K_m$ e comunque, certamente, svuota quelle associate a $\left(2\ ;\ \sqrt{2}\right)$ con raggio $R_n = 692 \cdot 10^6\ K_m$ ed a (3) con $R_n = 615{,}1 \cdot 10^6\ K_m$.
Il raggio d' azione del pianeta Marte all' afelio si estende fino a :

$$d_A = (249{,}1 + 6{,}7) \cdot 10^6\ K_m = 255{,}8 \cdot 10^6\ K_m$$

L'osservazione astronomica riferisce che tra Giove e Marte si trova un anello di asteroidi che, secondo i nostri calcoli, si trova "confinato"

esattamente tra i punti in cui non si manifesta più l'azione attrattiva di questi due pianeti. La situazione delle orbite nella zona dei pianetini è quella rappresentata in figura 27.



La maggiore aggregazione di masse si ha in corrispondenza delle orbite stabili.

Per poter avere in tutta la fascia un solo pianeta, è necessario che si abbia una massa con capacità di aggregare tutte le particelle sparse nella fascia. Se pensiamo questa massa localizzata sull'orbita stabile centrale, associata al numero quantico $n = \left(\mathbf{3}\ ;\ \sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ di raggio $R_n = \mathbf{461{,}3 \cdot 10^6}\ K_m$, il suo raggio d'azione minimo dovrà essere :

$$R_{maxa} = (461{,}3 - 259{,}5) \cdot 10^6\ K_m = \mathbf{201{,}8 \cdot 10^6}\ K_m$$

Il valore minimo della massa necessaria si ricava dalla :

$$R_{maxa} = \mathbf{2} \cdot \left[\frac{m_x}{m_s}\right]^{\frac{1}{3}} \cdot R_p$$

213

e quindi, con i valori numerici, si ottiene :

$$m_x = \left[\frac{R_{maxa}}{2 \cdot R_p} \right]^3 \cdot m_s = \left[\frac{201{,}8}{2 \cdot 461{,}3} \right]^3 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}\ K_g = \mathbf{2{,}08 \cdot 10^{28}}\ K_g$$

In alternativa, si potrebbe avere un pianeta su ciascuna orbita stabile ed in questo caso, per poter svuotare tutta la fascia, essi dovrebbero avere :

$$R_{maxa1} = (580 - 461{,}3) \cdot 10^6\ K_m = \mathbf{118{,}7 \cdot 10^6}\ K_m$$

$$R_{maxa2} = (346 - 259{,}5) \cdot 10^6\ K_m = \mathbf{86{,}5 \cdot 10^6} K_m$$

D’altra parte, per poter restare stabilmente sulle loro orbite, i due pianeti devono esercitare una forza gravitazionale trascurabile sia tra loro che con i pianeti confinanti, quindi è anche necessario che si abbia :

$$R_{maxa1} \le (461{,}3 - 346) \cdot 10^6\ K_m = \mathbf{115{,}3 \cdot 10^6}\ K_m$$

$$R_{maxa2} \le (346 - 259{,}5) \cdot 10^6\ K_m = \mathbf{86{,}5 \cdot 10^6}\ K_m$$

Per avere dunque la fascia degli asteroidi " **pulita** ", con solo due pianeti in orbita stabilmente, in definitiva, dovrà essere :

$$R_{maxa1} = \mathbf{115{,}3 \cdot 10^6}\ K_m \ ; \ R_{maxa2} = \mathbf{86{,}5 \cdot 10^6}\ K_m$$

Si ricavano così i valori delle masse necessarie :

$$m_1 = \left[\frac{115{,}3}{2 \cdot 461{,}3} \right]^3 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}\ K_g = \mathbf{3882{,}4 \cdot 10^{24}}\ K_g$$

$$m_2 = \left[\frac{86{,}5}{2 \cdot 346} \right]^3 \cdot 1{,}9891 \cdot 10^{30}\ K_g = \mathbf{3884{,}9 \cdot 10^{24}}\ K_g$$

Se dunque fosse disponibile in tutta fascia dei pianetini una massa complessiva $m = m_1 + m_2 = \mathbf{7767{,}3 \cdot 10^{24}}\ K_g$, **progressivamente si formerebbero, sulle due orbite stabili, due pianeti aventi praticamente la stessa massa.**

Un valore minore della massa complessiva porterebbe alla formazione degli anelli di particelle di piccole dimensioni, mentre con un valore piu'elevato si avrebbe la loro graduale unione in un solo pianeta.

L'osservazione astronomica riferisce però della presenza nella fascia di una massa complessiva estremamente ridotta e dunque, anche se sulle orbite si aggregano asteroidi aventi dimensioni apprezzabili, resteranno sempre piccole masse sparse in tutta la fascia, che non sarà possibile aggregare.

Secondo la teoria che abbiamo finora esposto, le caratteristiche del moto di rotazione su se stessa di una qualsiasi sfera materiale, in equilibrio in uno spazio rotante, è definita solo dal momento angolare complessivo dei suoi satelliti.

Infatti, ciascuno di essi fornisce una componente perpendicolare al suo piano orbitale e la somma vettoriale di tutte le componenti associate ai satelliti deve assumere la direzione dell'asse di rotazione della sfera centrale secondo la schematizzazione di figura 28.

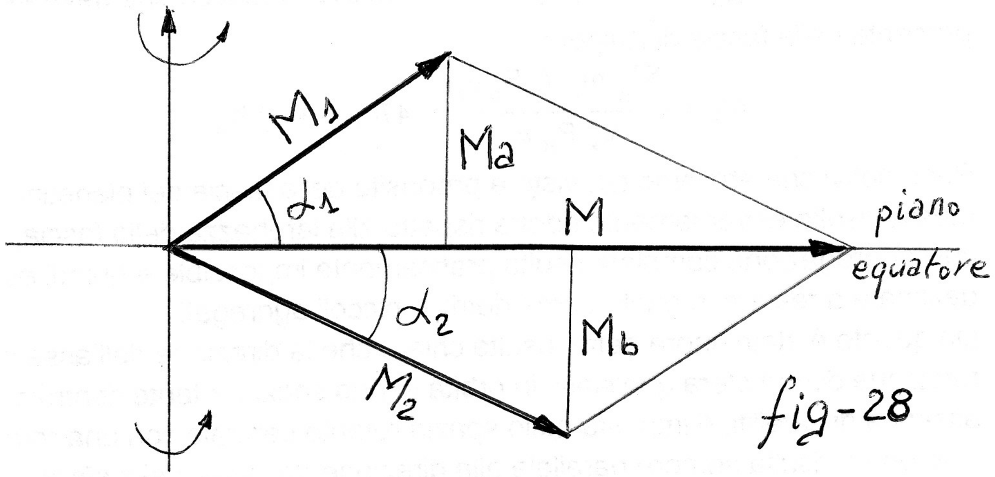


fig-28

con riferimento alla figura, abbiamo: $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2$ e, per avere $\vec{M}$ sul piano equatoriale, dovrà essere $M_a = M_b$ e quindi :

$$M_1 \cdot \mathbf{sen}\alpha_1 = M_2 \cdot \mathbf{sen}\alpha_2$$

per angoli piccoli, si può scrivere $\mathbf{sen}\alpha = \alpha$ e quindi : $M_1 \cdot \alpha_1 = M_2 \cdot \alpha_2$

215

Nel Sistema Solare sono note le inclinazioni delle orbite rispetto all'eclittica e quindi l'inclinazione rispetto al piano equatoriale risulta :

$$\alpha_S = \alpha_{ST} - \alpha_T = 7,25° - \alpha_T$$

Per tutti i pianeti del Sistema Solare, approssimativamente, si ricava :

$$\sum_n m_n V_n R_n \alpha_n = \sum_n m_n C_n \alpha_n = \mathbf{17572 \cdot 10^{34}} \frac{K_m^2}{sec} K_g°$$

Se possiamo trascurare la massa presente complessivamente in orbita nella fascia dei pianetini, il momento angolare mancante, richiesto per l'equilibrio, deve essere fornito dalla fascia di Kuiper e dunque, se utilizziamo questa condizione, possiamo fare una stima della massa in essa presente.

Assumiamo per la fascia di Kuiper il raggio medio :

$$R_K = \frac{(7381+14762) \cdot 10^6 \; K_m}{2} = \mathbf{10755 \cdot 10^6} \; K_m$$

la velocità orbitale media vale : $$V_K = \frac{K_S}{R_K^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{3,513} \frac{K_m}{sec}$$

Dato che il pianeta Plutone deve essere arrivato nella posizione attuale dalla ultima orbita stabile della fascia, l'inclinazione della fascia di Kuiper rispetto all'asse solare, deve essere, **approssimativamente**, coincidente con quella dell'orbita di plutone e quindi si può assumere :

$$\alpha_k = \alpha_{ST} - \alpha_{Pl} = 7,25° - 17,1298° = -\mathbf{9,8798}°$$

Per l' equilibrio del momento angolare, dovrà dunque essere :

$$m_K V_K R_K \alpha_K = \sum_n m_n V_n R_n \alpha_n$$

da cui si ricava la massa che deve essere presente nella fascia di Kuiper :

$$m_K = \frac{\sum_n m_n V_n R_n \alpha_n}{V_K R_K \alpha_K} = \mathbf{470,7 \cdot 10^{24}} \; K_g$$

Per i motivi che abbiamo già considerato a proposito della fascia dei pianetini, **la massa risulta estremamente ridotta rispetto alla larghezza della fascia**, **per cui l'aggregazione completa risulta praticamente impossible e quindi essa è destinata a restare in orbita come detriti e piccoli aggregati**.

Da quanto abbiamo finora visto, risulta chiaro che la direzione dell'asse di rotazione di una sfera planetaria qualsiasi, in orbita in uno spazio rotante centrale, in assenza di satelliti, viene imposta dallo spazio rotante centrale con una rotazione sincrona e risulta sempre parallela alla direzione dell'asse della sfera centrale.

Se la sfera planetaria "cattura" masse satelliti nel suo spazio rotante, **essendo il piano orbitale dipendente unicamente dalla posizione iniziale del satellite nel momento della cattura**, **la direzione dell'asse di rotazione acquistato definitivamente del pianeta** (**come risultante del momento angolare di tutti i suoi satelliti**) **sarà puramente casuale ed indipendente dallo spazio rotante centrale**.

In pratica questa indipendenza non può realizzarsi pienamente, in quanto ciascun sistema subordinato deve soddisfare il principio di conservazione del momento angolare e la rotazione che viene imposta al pianeta dal satellite costituisce una perturbazione per l' equilibrio preesistente con la rotazione sincrona.