–Origine teorica e significato fisico della costante di Planck, basi della teoria dei quanti

Nel paragrafo **29** abbiamo visto che le indicazioni fornite dalla legge di Wien inducevano alla ricerca di una relazione teorica tra la temperatura del corpo e la lunghezza d'onda della radiazione emessa.

Secondo le conoscenze del tempo, rifacendosi a Maxwell e alle prime prove di Hertz sulle **onde elettromagnetiche**, venne spontaneo immaginare i corpi formati da tanti piccoli oscillatori di Hertz, ciascuno con la propria frequenza di oscillazione, coincidente con quella della radiazione emessa.

Con questa ipotesi sul meccanismo di emissione, molti ricercatori giunsero allo stesso risultato, **la formula di Rayleigh – Jeans** :

$$W_\lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot C_l}{\lambda^4} \cdot k \cdot T$$

dove **k** è la costante di Boltzmann, ricavata con la teoria cinetica dei gas.

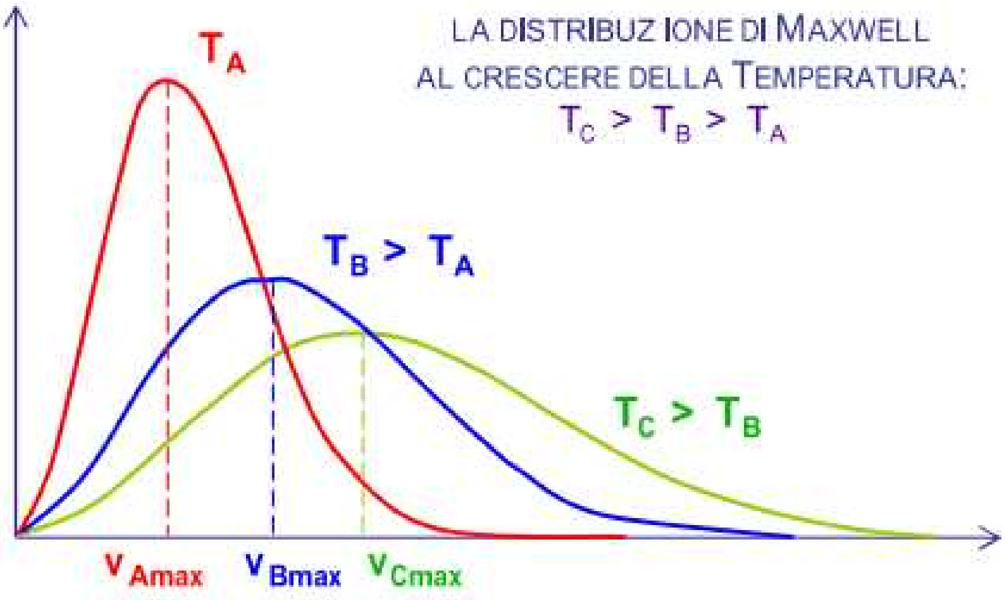
Desta certamente meraviglia il fatto di trovare, in una trattazione che riguarda onde elettromagnetiche, delle costanti o grandezze che sono state definite in tutt'altro campo, cioè nella teoria cinetica dei gas, che riguarda l'equilibrio di particelle materiali.
Il problema viene dunque affrontato considerando l'equilibrio degli oscillatori come l'equilibrio statistico delle molecole in seno ad un gas.

L'intensità della radiazione emessa divisa per la relativa lunghezza d'onda λ presentava un andamento caratteristico, con un massimo in corrispondenza di una determinata frequenza, mentre la formula di Rayleigh - Jeans presenta un andamento che si avvicina a quello sperimentale solo per frequenze molto basse, mentre se ne discosta decisamente verso le alte frequenze.

A questo punto **Wien**, osservò che la famiglia delle curve sperimentali della emissività in funzione della lunghezza d'onda, con parametro la temperatura, curve di cui si cercava l'espressione teorica, presentava più che un'**analogia con la nota distribuzione di Maxwell** della concentrazione di molecole in funzione della loro velocità, e dunque dell'energia, descritta dalla relazione :

$$N_m\% = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{m}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{m \cdot V^2}{2 \cdot k \cdot T}}$$

254z4

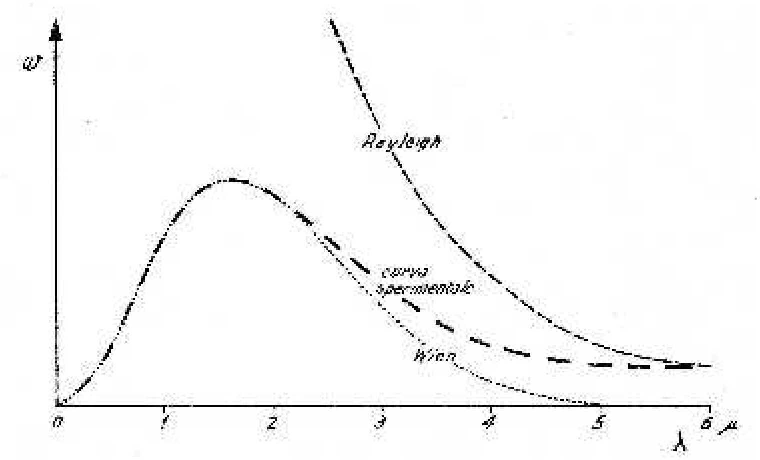


il valore della velocità $\mathbf{v_{max}}$ in corrispondenza del quale il numero di particelle N_m% raggiunge il valore massimo risulta : $\mathbf{v_{max}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m}}$

Wien, **con ulteriori elaborazioni della sua legge**, **giunse alla relazione** :

$$w_\lambda = a \cdot \nu^5 \cdot C_l \cdot e^{-\frac{b \cdot \nu}{k \cdot T}}$$

che si adattava all'esperimento meglio alle alte frequenze e meno alle basse, come è mostrato in figura.



Anche questa relazione, che prevedeva comunque le costanti sperimentali **a** e **b**, derivava direttamente **dalla statistica di Maxwell - Boltzmann** e quindi **si basava su una discutibile analogia di comportamento fra radiazione e gas perfetto**. **Si tratta comunque sempre di "tentativi" che non hanno solide basi teoriche**, **che puntano solo a conseguire un risultato con qualsiasi artificio**.

Dato che Wien non forniva i valori delle costanti fisiche per applicare la legge, Planck iniziò il suo lavoro nell'intendo di ricavare questa legge semiempirica attraverso un ragionamento teorico rigoroso, al fine di ottenere i valori delle costanti, che egli vedeva come **costanti universali**, in quanto facevano parte di una legge universale.

Essendo, nell'espressione di Maxwell l'energia della particella $\mathbf{E} = \dfrac{\mathbf{m \cdot v^2}}{\mathbf{2}}$

il fattore esponenziale si può scrivere : $e^{-\frac{E}{k \cdot T}}$

Il fattore esponenziale della legge di Wien vale : $e^{-\frac{b \cdot \nu}{k \cdot T}}$

Il confronto suggerisce a Planck, **come prima ipotesi di lavoro**, di porre la energia emessa da un oscillatore proporzionale alla frequenza di oscillazione secondo la relazione : $E = h \cdot \nu$

dove h rappresenta solo la costante di proporzionalità tra la frequenza della radiazione emessa e il valore dell'energia emessa.

Dato che il numero di oscillatori che, in un certo istante, emettono energia, è praticamente infinito, per avere un valore finito dell'energia E emessa, ogni oscillatore dovrà dare un contributo infinitesimo e quindi alla fine del discorso si dovrà porre il fattore $h_i \rightarrow 0$ e questo riporterà anche a una **distribuzione continua dell'energia emessa dagli oscillatori**, in accordo con quanto è previsto dalla teoria elettromagnetica.

Fissata la temperatura degli oscillatori e la frequenza della radiazione che si considera, il numero di oscillatori che emettono su quella frequenza, ciascuno con la propria energia, sarà :

n_0 oscillatori che emettono energia uguale a $E_0 = 0 \cdot \nu$,

n_1 che forniscono l'energia $E_1 = h_1 \cdot \nu$

254z6

n_2 che forniscono l'energia $E_2 = h_2 \cdot \nu$
n_3 che forniscono l'energia $E_3 = h_3 \cdot \nu$, e così via

Il numero degli oscillatori che emettono la stessa energia è dato dalla curva di distribuzione di Maxwell, che possiamo scrivere in forma sintetica :

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}}$$

Il numero totale degli oscillatori che emettono energia sulla frequenza ν sarà:

$$n_\nu = n_0 \cdot e^{-\frac{0 \cdot \nu}{k \cdot T}} + n_0 \cdot e^{-\frac{h_1 \cdot \nu}{k \cdot T}} + n_0 \cdot e^{-\frac{h_2 \cdot \nu}{k \cdot T}} + \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$= n_0 \cdot \left(1 + e^{-\frac{h_1 \cdot \nu}{k \cdot T}} + e^{-\frac{h_2 \cdot \nu}{k \cdot T}} + e^{-\frac{h_3 \cdot \nu}{k \cdot T}} \;\ldots\ldots \right)$$

che si può scrivere sinteticamente :

$$n_\nu = n_0 \cdot \sum_0^\infty \left(e^{-\frac{\nu}{k \cdot T}} \right)^{h_i} \qquad \text{con } h_0 = 0$$

A questo punto l'unica maniera per poter calcolare la sommatoria è quella di farla diventare una serie, assegnando all'esponente h_i una forma del tipo :

$$h_i = f(m) \cdot h \qquad \text{con } m = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Non avendo nessun elemento teorico per lascelta della funzione $f(m)$, viene arbitrariamente scelta la più semplice ponendo $f(m) = m$.
Si ottiene così la serie geometrica :

$$n_\nu = n_0 \cdot \sum_0^\infty \left(e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} \right)^{m}$$

essendo $-1 < e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} < 1$ il risultato della somma vale :

254z7

$$\sum_{0}^{\infty}\left(e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}\right)^{m} = \frac{1}{1-e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}}$$

e quindi il numero totale degli oscillatori risulta :

$$n_\nu = \frac{n_0}{1-e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}}$$

Se ora vogliamo conoscere l'energia totale E_ν emessa da tutti gli oscillatori, sarà sufficiente sommare i prodotti dei valori delle energie E_0, E_1, E_2, ecc. per il numero degli oscillatori n_0, n_1, n_2, ecc.. che le emettono.
Si avrà quindi :

$$E_\nu = n_0\cdot E_0 + n_1\cdot E_1 + n_2\cdot E_2 + - - - - -$$

ossia :

$$E_\nu = (h\cdot\nu)\cdot n_0\cdot e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}} + (2\cdot h\cdot\nu)\cdot n_0\cdot e^{-\frac{2\cdot h\cdot\nu}{k\cdot T}} + - - - - =$$

$$= (h\cdot\nu)\cdot n_0\cdot e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}\cdot\left(1 + 2\cdot e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}} + 3\cdot e^{-\frac{2\cdot h\cdot\nu}{k\cdot T}} + ...\right)$$

la parentesi è una serie aritmetica che vale: $\dfrac{1}{\left(1-e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}\right)^2}$

si ha quindi : $E_\nu = (h\cdot\nu)\cdot n_0\cdot e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}\cdot\dfrac{1}{\left(1-e^{-\frac{h\cdot\nu}{k\cdot T}}\right)^2}$

254z8

ricordando che il numero totale di oscillatori che emettono alla frequenza ν

vale :
$$n_\nu = \frac{n_0}{1 - e^{-\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}}}$$

sostituendo, si ottiene :
$$E_\nu = \frac{(h \cdot \nu) \cdot n_\nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

Dividendo l'energia emessa per il numero degli oscillatori che la emettono, si ottiene **il valore medio dell'energia emessa da ogni oscillatore** :

$$E_{\nu m} = \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

Riprendendo ora la formula di Rayleigh - Jeans e tenendo conto che in questo caso i gradi di libertà degli oscillatori sono $n = 2$, Planck pone, con la legge

di Boltzmann :
$$E_{\nu m} = \frac{n}{2} \cdot k \cdot T = k \cdot T$$

che, sostituita nella formula di Rayleigh - Jeans, fornisce :

$$w_\lambda = \frac{8 \cdot \pi \cdot C_l}{\lambda^4} \cdot E_{\nu m}$$

sostituendo, si ottiene l'espressione dell'energia specifica ($\frac{J}{m^3 \cdot sec}$) irradiata dal corpo nero :

$$w_\nu = \frac{8 \cdot \pi \cdot C_l}{\lambda^4} \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

Questa espressione, detta **legge di Planck**, fornisce finalmente una densità d'irraggiamento del corpo coincidente con la curva sperimentale.

254z9

A questo punto notiamo che, le curve sperimentali per le alte frequenze sono praticamente coincidenti con quelle fornite dalla formula di Wien :

$$\mathbf{W}_{\lambda} = \mathbf{a} \cdot \nu^{5} \cdot \mathrm{C_l} \cdot e^{-\frac{b \cdot \nu}{k \cdot T}}$$

per $\nu \rightarrow \infty$ nella relazione di Planck, il denominatore si riduce a $e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}}$

e quindi, confrontando le due espressioni possiamo ricavare le due costanti **a** e **b** che compaiono nella formula di Wien (inizialmente era questo lo scopo di Planck) e risulta :

$$\mathbf{a} = \frac{8 \cdot \pi \cdot \mathrm{h}}{\mathrm{C_l^4}} \quad ; \quad \mathbf{b} = \mathrm{h}$$

A questo punto ricordiamo però che la costante di proporzionalità h è stata introdotta da Planck solo per poter sviluppare il calcolo in maniere semplice, assegnando **provvisoriamente** ad ogni oscillatore il suo valore di energia $\mathrm{E} = \left(\mathbf{m} \cdot \mathrm{h}\right) \cdot \nu$ con $\mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$, ecc..

Facendo questa ipotesi è chiaro che **venivano esclusi** dal conteggio tutti gli oscillatori compresi tra $\mathbf{m}$ e $\left(\mathbf{m} + \mathbf{1}\right)$ e questo, oltre ad essere in disaccordo **con la teoria elettromagnetica**, **che prevedeva una variazione continua della energia emessa**, falsificava anche il valore dell'energia calcolato.

Anche se questi due inconvenienti **erano noti** fin dall'inizio, Planck utilizzò lo stesso il calcolo prevedendo di eliminarli alla fine ponendo $\mathrm{h} \rightarrow \mathbf{0}$.

Per eseguire questo limite, sostituiamo lo sviluppo in serie :

$$e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} = \mathbf{1} + \frac{h \cdot \nu}{k \cdot T} + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{2}}{\mathbf{2}} + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{3}}{\mathbf{6}} + - - - - - + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{n}}{\mathbf{n}!}$$

ossia :

$$e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - \mathbf{1} = \frac{h \cdot \nu}{k \cdot T} + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{2}}{\mathbf{2}} + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{3}}{\mathbf{6}} + - - - - + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{n}}{\mathbf{n}!} =$$

254z10

$$= \frac{h \cdot \nu}{k \cdot T} \cdot \left(1 + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^1}{2} + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^2}{6} + - - - - + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{n-1}}{n!} \right)$$

Sostituendo e semplificando, la legge di Planck si può dunque scrivere nella forma :

$$W_\nu = \frac{8 \cdot \pi \cdot C_l}{\lambda^4} \cdot \frac{k \cdot T}{\left(1 + \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^1}{2} + - - \frac{\left(\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}\right)^{n-1}}{n!} \right)}$$

Se a questo punto, secondo quanto era previsto inizialmente si pone $h \rightarrow 0$, la formula si riduce a quella di Rayleigh - Jeans, ripresentando il problema che è stato appena risolto e questo diventava un comportamento da interpretare.

Innanzitutto si osservò che la formula di Planck descriveva bene le curve che si ricavavano sperimentalmente solo ponendo $h = 1.054572669 \cdot 10^{-34}$ j $\cdot$ sec. e questo era contrario alle previsioni.

Questo risultato restò per un periodo di tempo molto lungo senza una valida interpretazione, anche perchè la formula era stata ricavata **senza un grosso supporto teorico**, facendo ricorso ad analogie molto discutibili, seguite da altrettanti artifici matematici e ipotesi azzardate, tutto al solo scopo di ottenere il risultato giustificato dall'esperienza :

$$W_\nu = \frac{8 \cdot \pi \cdot C_l}{\lambda^4} \cdot \frac{h \cdot \nu}{e^{\frac{h \cdot \nu}{k \cdot T}} - 1}$$

In definitiva, il problema era di tale importanza da far rinunciare, **inizialmente**, alla coerenza dell'analisi teorica.
Per cercare di interpretare, a posteriori, il risultato, ripercorriamo la strada che è stata fatta per ottenerlo.

Tralasciando le analogie prese in considerazione inizialmente per inquadrare il problema nell'ambito della teoria termodinamica, il primo passo azzardato

254z11

è stata certamente l'ipotesi che, per una data frequenza ν, **ogni oscillatore emettesse una energia ad essa proporzionale**, **ciascuno con una sua costante di proporzionalità** $\mathbf{h}_i$ **.**

Questa ipotesi non aveva **nessuna giustificazione teorica ed è stata resa possibile solo dalla previsione di porre alla fine** $\mathbf{h}_i \to \mathbf{0}$, **cosa che ora non è possibile fare**.

Il passo successivo è stato quello di porre $\mathrm{h}_i = \mathbf{m} \cdot \mathrm{h}$ con $\mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$, ecc.. al solo scopo di creare una serie geometrica con l'esponente della funzione esponenziale dato da $\left(\mathbf{m} \cdot \mathrm{h}\right) \cdot \nu$.

Questo passaggio consentiva il calcolo del numero totale n_ν degli oscillatori che emettevano radiazione alla frequenza ν considerata, che davano quindi un contributo all'energia totale emessa dal corpo nero alla frequenza ν**.**

Si tratta dunque di un passo essenziale, irrinunciabile per poter considerare tutto lo spettro di energe.
Avendo posto, per variare l'energia, $\mathrm{E} = \mathrm{h} \cdot \nu$, se il fattore h **deve essere costante**, per prendere in considerazione tutti i valori di energia, dobbiamo considerare variabile la frequenza ν**.**

Osserviamo però che il prodotto non cambia se si sostituisce :

$$\left(\mathbf{m} \cdot \mathrm{h}\right) \cdot \nu \to \mathrm{h} \cdot \left(\mathbf{m} \cdot \nu\right)$$

Dal punto di vista analitico, il risultato non cambia, " **ma cambia certamente l'interpretazione fisica** ".

Se questa seconda forma è l'unica che porta a risultati in concordo con quelli sperimentali, vuol dire che essa è l'unica fisicamente realizzabile, ossia **non possono esistere oscillatori**, **del tipo considerato**, **che emettono energia diversa con la stessa frequenza**.

In altre parole :
Un oscillatore può variare il valore dell'energia emessa solo variando la frequenza di emissione.
Il valore della frequenza definisce anche quello dell'enegia.

254z12

" per il tipo di oscillatore considerato "esiste quindi tra energia e frequenza una relazione del tipo :

$$E = h \cdot \nu \quad \text{con} \quad h = \textbf{costante} \text{ (per gli oscillatori considerati)}$$

Non esistono dunque oscillatori che emettono energia diversa con la stessa frequenza.

Questa è però da considerare una realtà fisica e non un risultato legato al metodo di calcolo.

L'impossibilità di portare a termine il calcolo previsto da Planck ($h_i \rightarrow 0$) "**ci ha consentito di scoprire questa realtà** ".

Un altro importante risultato non previsto, che il calcolo mette in evidenza è il fatto che, per conservare il risultato finale, concorde con l'esperimento, sarà necessario considerare nel calcolo le frequenze emesse $(\mathbf{m} \cdot \nu)$, che, con $\mathbf{m} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}$, ecc.. , non fornisce uno spettro continuo.

Il risultato corretto si ottiene dunque solo escludendo **dal conteggio le frequenze comprese tra m ed** $(\mathbf{m}+\mathbf{1})$.

L'unica interpretazione che si può dare di questa esigenza è che **nella realtà** " **gli oscillatori che sono stati considerati** " **non hanno la possibilità di oscillare su queste frequenze**.

In altre parole, scrivendo l'energia emessa nella forma : $E = (h \cdot \nu) \cdot \mathbf{m}$ possiamo dire che gli oscillatori possono emettere solo energie multiple della quantità :

$$E_0 = (h \cdot \nu_0)$$

con $h = 1.054572669 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{j} \cdot \mathrm{sec}$ indicata come **costante di Planck**.

Il più piccolo valore di energia E_0, associato a $\mathbf{m} = \mathbf{1}$, che un oscillatore può emettere viene indicato come "**pacchetto o quanto**" di energia e possiamo dire che questo rappresenta **l'origine teorica** della meccanica quantistica.

La ricostruzione che abbiamo fatto mette in evidenza come la scoperta della costante h da parte di Planck non sia il risultato atteso dopo una particolare intuizione, seguita da un'accurata analisi teorica del processo di emissione

254z13

della radiazione, ma piuttosto il fortunato risultato di un errore d'impostazione nello studio finalizzato a conciliare i risultati teorici con quelli sperimentali, che Planck portava avanti pensando che l'energia raggiante venisse assorbita e emessa in modo continuo.

Nessuno infatti comprese il significato fisico fino a quando Einstein non lo utilizzò per spiegare l'**effetto fotoelettrico**, riconoscendo per primo che la quantizzazione dell'energia raggiante, ottenuta da Planck non era un semplice artificio matematico, ma " **una proprietà generale della radiazione allora conosciuta** ".

Bisogna ricordare che tutta la **radiazione nota** era allora di natura atomica e quindi il risultato ottenuto assumeva il carattere di quantizzazione universale dell'energia e questo circondava h di un particolare alone di mistero, che gli assegnava un significato decisamente diverso da quello di semplice costante di proporzionalità.

Notiamo infine che la meccanica quantistica, **dal punto di vista teorico**, **nasce come quantizzazione dell'energia** semplicemente perchè lo studio degli oscillatori è stato affrontato dal punto di vista energetico, senza alcuna indagine sul processo intimo di emissione (allora non possibile) e quindi **sulla sua origine fisica**.

Per questa ragione, anche negli studi successivi sull'atomo, condotti da Bohr e altri ci si vide costretti a fare **ipotesi che prevedevano la quantizzazione dell'energia come punto di partenza e non di arrivo**.

Vogliamo ora ricavare **l'origine fisica della meccanica quantistica con la teoria degli spazi rotanti**.

Abbiamo già visto con la teoria generale che, **in uno spazio rotante di valore K^2** , **la condizione per avere l'equilibrio orbitale nel rispetto dei principi di conservazione dell'energia e del momento angolare è che il raggio dell'orbita soddisfi la condizione di quantizzazione** :

$$R = R_1 \cdot p^2$$

in cui R_1 rappresenta la prima orbita stabile, associata a $p = 1$

Dunque la prima quantizzazione con validità universale, **applicabile a tutta la materia**, **sia ai sistemi atomici e subatomici che a**

254z14

quelli di dimensioni galattiche, **è solo quella del raggio delle orbite**. " **Essa è quindi solo di natura geometrica** ".

Applicando la legge fondamentale degli spazi rotanti :

$$V^2 \cdot R = K^2$$

vediamo che la quantizzazione del raggio genera una quantizzazione della velocità orbitale, **espressa dalla relazione** :

$$V = \frac{V_1}{p}$$

dove V_1 è la velocità associata alla prima orbita con $p = \mathbf{1}$.

Se m è la massa in orbita, l'energia che la lega allo spazio rotante è uguale al valore dell'energia cinetica e vale quindi :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{V_1^2}{p^2}$$

Se m_{S1} è la massa solare che genera lo spazio rotante centrale K_{S1}^2 , una massa solare di valore $m_S = Z \cdot m_{S1}$ genera uno spazio rotante dato da :

$$K_Z^2 = Z \cdot K_{S1}^2$$

Si dimostra che le caratteristiche orbitali in questo caso diventano :

$$R = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2 \quad ; \quad V = V_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{p}$$

L'energia di legame della massa orbitante vale quindi :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{11}^2 \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2}$$

Trattando la materializzazione dell'energia e l'annichilazione della materia, abbiamo visto che il valore dell'energia di legame E è uguale al valore della

254z15

energia che viene emessa dallo spazio rotante quando la massa si sposta sull'orbita, partendo da una distanza teorica $R = \infty$ e coincide anche con il valore di **energia che bisogna fornire** alla massa in equilibrio sull'orbita per aumentare la sua velocità fino al valore di fuga $V_f = \sqrt{2} \cdot V_{eq}$, che la porta fino alla distanza teorica $R = \infty$.

Il valore dell'energia assorbita o emessa dipende dalla massa presente sulla orbita e quindi, se si considerano sistemi con valori casuali delle masse, per esempio quelli astronomici, si avrànno valori casuali delle energie.

Se invece consideriamo gli atomi, in orbita abbiamo solo elettroni e quindi il valore dell'energia E, per un dato l'atomo, dipende solo dall'orbita occupata.

Possiamo quindi calcolare il valore minimo associato all'elettrone sulla prima orbita dell'atomo di idrogeno, con $Z = 1$ e $p = 1$:

$$E_{11} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{11}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \frac{K_{S1}^2}{R_{11}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \frac{K_p^2}{R_{11e}}$$

sostituendo i valori numerici, si ottiene :

$$E_{11} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot \frac{K_p^2}{R_{11e}} = 13.60569806\,\text{eV}$$

Per qualsiasi atomo, **l'energia di legame di un elettrone** in orbita vale :

$$E_{Z1e} = 13.60569806\,\text{eV} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2}$$

Fissato il numero atomico Z, si ottiene il valore dell'energia di legame di un elettrone su qualsiasi orbita: per esempio, per lo stagno, con $Z = 50$ si ha :

$$E_{Z1e}(50) = 184.657732\,\text{eV} \cdot \frac{1}{p^2}$$

per esempio, per un elettrone presente sull'ultima orbita, con $p = 5$, il valore dell'energia di legame risulta : $E_{Z1e}(50\,;\,5) = 7.38630928\,\text{eV}$

Il valore sperimentale dell'energia di ionizzazione risulta $E_i(50) = 7.344\,\text{eV}$

254z16

Analogamente, per il radio, con $Z = \mathbf{88}$, si ottiene :

$$E_{Z1e}(88) = \mathbf{269.1798885}\,eV \cdot \frac{1}{p^2}$$

L'energia di estrazione di un elettrone dall'orbita di confine, con $p = \mathbf{7}$, risulta: $E_{Z1e}(88\,;\,7) = \mathbf{5.493467113}\,eV$.

Il valore sperimentale dell'energia di ionizzazione vale : $E_i(88) = \mathbf{5.279}\,eV$

Un elettrone sul secondo livello ha un'energia di legame :

$$E_{Z1e}(88\,;\,2) = \mathbf{67.29497213}\,eV$$

Queste relazioni mettono in evidenza che :

La **quantizzazione universale** riguarda solo la geometria dell'universo,ossia le orbite delle sfere planetarie presenti in equilibrio su di esse e le velocità di orbitali .
Risulta invece assolutamente indipendente dal valore delle masse.

La quantizzazione **non è dunque una caratteristica peculiare dei sistemi atomici e subatomici**, **ma di tutto l'universo**.

Nei sistemi che presentano le masse in orbita **tutte uguali fra loro**, **sistemi atomici e nucleari**, alle due quantizzazioni citate **si aggiunge quella della energia**.

Essa non è dunque il risultato di un processo ignoto e misterioso, **ma**, **molto più semplicemente**, **ciò che si ricava applicando le normali leggi dell'equilibrio allo spazio rotante atomico**.

Vediamo quindi quali sono l'origine fisica e il significato fisico della costante di Planck.
Ricordiamo ora che, nel calcolo della deviazione di una massa, la condizione $\beta = \pi/2$ corrisponde alla situazione in cui **lo spazio rotante solare** K_s^2 **ha raggiunto il valore minimo** della capacità di trattenere la massa m in moto all'interno della falda spaziale di raggio minimo $R_n = 2 \cdot R_p$ (ricordiamo che R_p rappresente il perielio dell'orbita, ossia il punto in cui la velocità radiale si inverte).

254z17

Se quindi, mantenendo la velocità V_p costante, riduciamo **anche di poco** la distanza R_p , la velocità V_p **diventa troppo bassa per avere la massa** m **in equilibrio sull'orbita di raggio** R_n **, ma anche troppo alta per poterla avere in equilibrio su quella di raggio** R_{n-1}.

In queste condizioni la massa m si trova con un eccesso di energia rispetto al valore richiesto per **formare un sistema equilibrato** con lo spazio rotante, restando in moto sull'orbita di raggio R_{n-1}, ma anche insufficiente per poter abbandonare lo spazio rotante.

Essa non ha dunque nessun punto di equilibrio stabile possibile nello spazio rotante e "l'unica" **traiettoria sulla quale si possono verificare** i principi di conservazione **dell'energia e del momento angolare è quella ellittica**.

Si è così formato un sistema chiuso che possiede un eccesso di energia ΔE rispetto alla condizione di equilibrio stabile, **che non riesce a trasferire da nessuna parte e quindi si crea un'autoscillazione della massa tra** R_{n-1} **ed** R_n **con un continuo scambio di energia tra massa e spazio rotante**.

Si dice brevemente che il sistema è eccitato dall'energia ΔE**,** che lo pone in un regime transitorio, analogamente a quanto si verififa, **per esempio**, **in un circuito** RLC con il condensatore inizialmente carico.

Come abbiamo visto trattando l'evoluzione del sistema Solare e del nucleo atomico, a questa oscillazione si associa una **perturbazione dell'equilibrio dello spazio rotante che si manifesta con una lentissima emissione di energia che dura fino alla totale eliminazione dell'eccesso** ΔE **con la riduzione del raggio dell'orbita al valore di equilibrio stabile** R_{n-1}.

E'chiaro che, se invece di attendere la fine di questo lento decadimento della orbita, **noi dall'esterno immettiamo la massa** m **direttamente sull'orbita stabile** R_{n-1} , essendo per ipotesi $V_p = V_{eqn-1} = \left(\dfrac{K_s^2}{R_{n-1}} \right)^{\frac{1}{2}}$

254z18

la massa m **si ferma sull'orbita**, emettendo in un solo periodo la energia potenziale:

$$E_{eq} = -m \cdot \frac{K_s^2}{R_{n-1}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{eqn-1}^2$$

Trattando il processo di annichilazione della materia (Art. 19), abbiamo visto che la massa m, quando giunge sull'orbita, va ad occupare un uguale volume di spazio rotante che è legato alla massa centrale m_s da un'energia uguale a quella di equilibrio E_{eq}.

Questa energia viene emessa sottoforma di perturbazione dello spazio fisico che si propaga con la massima velocità osservabile, che per ipotesi è uguale a quella della luce C_l.

Tutto il processo di emissione (non la propagazione) deve esaurirsi quando il sistema avrà raggiunto il regime finale, ossia **dopo un periodo orbitale**.

La velocità di fase di questa perturbazione vale :

$$V_f = \nu \cdot \lambda = \frac{E}{h} \cdot \frac{h}{P} = \frac{E}{P} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 \cdot \frac{1}{m \cdot V} = \frac{V}{2}$$

essa è dunque uguale a metà della veloità della massa proiettile.
Naturalmente è possibile il processo inverso.

Se una radiazione di frequenza ν, viene fatta interagire con lo spazio rotante K_s^2, sappiamo che viene trasferita sull'orbita un'energia $E = h \cdot \nu$.

Se supponiamo, per semplicità, che sia $E = E_{eq}$, abbiamo $\nu = \dfrac{E_{eq}}{h}$ e

in un periodo orbitale lo spazio rotante variabile associato alla perturbazione trasferisce tutta l'energia E alla massa in orbita, la quale si trova così **con un**

254z19

eccesso di energia ΔE **uguale a quella di equilibrio** E_{eq}, quindi l'energia raggiunge un valore doppio e **velocità orbitale diventa uguale al valore di fuga dall'orbita**.

In queste condizioni, con $e = \mathbf{1}$, **la massa percorre un'orbita parabolica**, uscendo definitivamente dallo spazio rotante.
Per verificare il principio di conservazione dell'impulso del sistema, la massa solare centrale m_s dovrà acquisire un impulso uguale a quello associato alla perturbazione assorbita.

Normalmente, quando si tratta questo argomento ci si riferisce all'interazione tra particelle atomiche e subatomiche.
In tal caso l'assorbimento o l'emissione di un elettrone da parte di un atomo viene indicato come effetto fotoelettrico **e la perturbazione che viene emessa o assorbita viene detta fotone.**

Le masse presenti sulle diverse orbite dello spazio rotante hanno un'energia di legame uguale a :

$$E_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot m \cdot V \cdot \nu_{eq} .$$

Dato che **in tutti gli atomi presenti nell'universo le masse in orbita sono sempre elettroni e il nucleo che genera lo " spazio rotante nucleare " è formato sempre da protoni**, può essere certamente utile assumere queste due particelle, **ciascuna nel proprio ruolo**, come riferimento per descrivere tutto lo spazio.

Nella relazione sostituiamo dunque : $$K_s^2 = \frac{K_s^2}{K_p^2} \cdot K_p^2 = Z \cdot K_p^2$$

$$R = R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2 \quad ; \quad V = V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{p}$$

K_p^2, R_{11e} e V_{11e} rappresentano i valori associati a $Z = \mathbf{1}$ e $p = \mathbf{1}$, dunque all'atomo di idrogeno, per il quale si ha :

254z20

$$R_{11e} = 5.29177249 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m} \quad ; \quad V_{11e} = 2187691.415\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

$$K_p^2 = V_{11e}^2 \cdot R_{11e} = 253.2638995\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{sec}^2}$$

Sostituendo, abbiamo quindi :

$$E_{eq} = 2 \cdot \pi \cdot \left(R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2 \right) \cdot m_e \cdot \left(V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{p} \right) \cdot \frac{\nu_{eq}}{2}$$

$$= \left(2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e} \right) \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot p \cdot \frac{\nu_{eq}}{2} \right)$$

A questo punto notiamo che "**la prima parentesi coincide numericamente con la costante di Planck**" e quindi possiamo porre :

$$h = 2 \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e} = 6.626075449 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{j} \cdot \mathrm{sec}$$

abbiamo dunque : $$E_{eq} = h \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot p \cdot \frac{\nu_{eq}}{2} \right)$$

Dall’equazione fondamentale degli spazi rotanti si ricava :

$$K_s^2 = V^2 \cdot R = K_p^2 \cdot Z = \frac{V^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R \cdot V}{2 \cdot \pi \cdot V} = T \cdot \frac{V^3}{2 \cdot \pi}$$

da cui :

$$\frac{1}{T} = \frac{V^3}{2 \cdot \pi \cdot K_p^2 \cdot Z} = \frac{V_{11e}^3 \cdot Z \cdot \frac{1}{p^3}}{2 \cdot \pi \cdot K_p^2 \cdot Z} = \frac{V_{11e}^3 \cdot \frac{1}{p^3}}{2 \cdot \pi \cdot K_p^2} =$$

$$= \frac{V_{11e}^2 \cdot V_{11e}}{2 \cdot \pi \cdot K_p^2 \cdot p^3} = \frac{V_{11e}}{2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot p^3} = \frac{1}{T_{11e} \cdot p^3}$$

254z21

e quindi si ha la relazione fondamentale :

$$T_{eq} = T_{11e} \cdot p^3 \quad \text{equivalente a :} \quad \nu_{eq} = \nu_{11e} \cdot \frac{1}{p^3}$$

Queste relazioni ci dicono che il periodo orbitale, **quindi la frequenza orbitale**, **dipende solo dal numero quantico associato all'orbita e** non dipende dallo spazio rotante considerato.

Esse saranno dunque applicabili a qualsiasi atomo o sistema astronomico.
Per esempio, qualsiasi massa in moto sull'orbita associata a $p = \mathbf{10}$, avrà un periodo orbitale :

$$T_{10} = T_{11e} \cdot \mathbf{10^3} = \mathbf{1.51982985 \cdot 10^{-16}}\ \text{sec} \cdot \mathbf{10^3} = \mathbf{1.51982985 \cdot 10^{-13}}\ \text{sec}$$

A titolo puramente esplicativo, calcoliamo il periodo orbitale della Terra sulla orbita p_T dello spazio rotante solare.
Per il **Sistema Solare** (come un grande atomo) si ricava :

$$Z_s = \frac{K_s^2}{K_p^2} = \frac{132.725 \cdot 10^{18}}{253.2638995} = \mathbf{5.2405802 \cdot 10^{17}}$$

L'orbita fondamentale, associata a $p = \mathbf{1}$, con il riferimento assunto, vale:

$$R_{s1} = R_{11e} \cdot Z_s^{\frac{1}{3}} = \mathbf{42,6639419 \cdot 10^{-6}}\ \text{m}$$

$$V_{s1} = V_{11e} \cdot Z_s^{\frac{1}{3}} = \mathbf{1,76378592 \cdot 10^{12}}\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$T_{s1} = T_{11e} = \mathbf{1,51982985 \cdot 10^{-16}}\ \text{sec}$$

Si tenga presente che quest'orbita non è reale e quindi non genera **nessuna** violazione. Questi risultati si ottengono perchè è stato scelto come riferimento un raggio di valore molto basso e quindi si raggiungono velocità elevate.
Del resto, il Sole non è puntiforme e al suo interno "**la velocità di equilibrio reale**" è data dalla :

254z22

$$V^2 \cdot r = G \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \delta_s \right) \text{ da cui : } V = \sqrt{G \cdot \frac{m_s}{r_s} \cdot \frac{r}{r_s}}$$

Considerando il pianeta Terra, sono note le caratteristiche orbitali :

$$R_T = 149597870 \text{ Km} \quad ; \quad e = 0,016707$$

si ricava :

$$R_{nT} = R_T \cdot \left(1 - e^2\right) = 149556113,7 \text{ Km}$$

$$p_T = \left(\frac{R_{nT}}{R_{S1}} \right)^{\frac{1}{2}} = 59,206801 \cdot 10^6$$

$$V_{nT} = V_{s1} \cdot \frac{1}{p_T} = 29790,25875 \ \frac{m}{sec}$$

$$V_T = V_{nT} \cdot \sqrt{1 - e^2} = 29786,1009 \ \frac{m}{sec}$$

$$T_{nT} = T_{11e} \cdot p_T^3 = 31,54349121 \cdot 10^6 \text{ sec} = 365,0867038 \text{ g}$$

$$T_T = \frac{T_{nT}}{\left(1 - e^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 365,2396137 \text{ g}$$

l'energia di legame della Terra allo spazio rotante solare risulta :

$$E_{nTS} = \left(\frac{m_T}{m_e} \right) \cdot E_{11e} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p_T^2} = 2,651729033 \cdot 10^{33} \text{ j}$$

$$E_{TS} = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot V_T^2 = E_{nTS} \cdot \left(1 - e^2\right) = 2,65098887 \cdot 10^{33} \text{ j}$$

254z23

Tornando al nostro problema, se si sostituisce l'espressione di ν_{eq} in quella dell'energia, si ottiene : $E_{eq} = h \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\nu_{11e}}{2} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$

abbiamo visto che la velocità di fase della perturbazione associata al moto di una particella "**in transizione**" è uguale a metà della velocità della particella stessa, quindi nel nostro caso la radiazione emessa avrà una frequenza :

$$\nu = \frac{\nu_{eq}}{2}$$

Se poniamo, per la radiazione emessa : $E_\nu = h \cdot \nu = h \cdot \frac{\nu_{eq}}{2}$

otteniamo :

$$E_\nu = h \cdot \nu = h \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \nu_{11e} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

e quindi la sua frequenza risulta :

$$\nu = \frac{\nu_{11e}}{2} \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

Per $Z = 1$ e $p = 1$, si ottiene la frequenza associata ad una transizione sul livello fondamentale dell'atomo di idrogeno da $R \rightarrow \infty$:

$$\nu(1\,;1) = \frac{\nu_{11e}}{2} = \frac{V_{11e}}{4 \cdot \pi \cdot R_{11e}} = 3.289841951 \cdot 10^{15}\, H_z$$

Ad ogni particella in orbita sul livello p dello spazio rotante di qualsiasi atomo **viene associata così una frequenza** :

$$\nu(Z\,;P) = \nu(1\,;1) \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

che rappresenta la frequenza della radiazione che viene emessa quando una

254z24

particella giunge sull'orbita da una distanza $R \to \infty$ oppure il valore minimo della frequenza della radiazione che bisogna fornire all'atomo per allontanare la particella dallo spazio rotante **per effetto fotoelettrico**.

In generale, per una massa m qualsiasi, in orbita in uno spazio rotante K_s^2, atomico oppure astronomico, **l'energia di legame** o quella della radiazione che viene emessa quando la massa giunge sull'orbita è data dalla relazione:

$$E_{eq} = E_{\nu} = E_{11e} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{m}{m_e} \cdot \left(1 - e^2\right)$$

oppure :

$$E_{\nu} = h \cdot \nu(1\,;\,1) \cdot \left[Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{m}{m_e} \cdot \left(1 - e^2\right) \right]$$

Sostituendo i dati relativi alla Terra si ottiene, per esempio :

$$E_{TS} = E_{\nu T} = \frac{1}{2} \cdot m_T \cdot V_T^2 = 2,65098887 \cdot 10^{33}\ \text{j} = 1.65461639 \cdot 10^{46}\,\text{MeV}$$

Abbiamo, a questo punto, un'espressione di validità assolutamente generale **della radiazione associata all'equilibrio di una massa m in moto su un'orbita ellittica di semiasse maggiore R, data dal prodotto di tre fattori** :

$$E_{\nu} = h \cdot \nu(1\,;\,1) \cdot \left[\frac{K_s^2}{K_p^2} \cdot \frac{R_{11e}}{R} \cdot \frac{m}{m_e} \right]$$

sinteticamente :

$$E_{\nu} = h \cdot \nu(1\,;\,1) \cdot f\left(Z\,;R\,;m\right)$$

Si noti che, essendo il nucleo atomico organizzato come uno spazio rotante, ad esso si applica la stessa relazione, sostituendo i valori che abbiamo già ricavato :

$m = \frac{3}{4} \cdot m_p =$ massa del protone orbitante " **polarizzato** "

254z25

$K_s^2 = Z \cdot \dfrac{K_p^2}{2}$ = spazio rotante generato dal **nucleo di neutroni** attivi

$R = R_{11p} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$ = raggio dell'orbita nucleare associata al livello p

$R_{11p} = \dfrac{2 \cdot m_e}{m_p} \cdot R_{11e}$ = orbita nucleare fondamentale per $Z = 1$

sostituendo, per il nucleo atomico si ottiene la relazione :

$$E_\nu = h \cdot \nu(1\,;1) \cdot \left[\frac{3}{16} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^2 \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right]$$

con i valori numerici, con $Z = 1$ e $p = 1$ si ottiene l'energia di legame di un solo protone nucleare :

$$E_\nu(1\,;1) = 8.6008173\,\text{MeV}$$

I valori numerici che si ottengono ci confermano la validità universale della relazione.

Il problema da risolvere, a questo punto, è il seguente.
L'espressione dell'**energia raggiante generalizzata**, che abbiamo ricavato è data da tre fattori : $E_\nu = h \cdot \nu(1\,;1) \cdot f(Z\,;R\,;m)$

L'espressione ricavata utilizzando l'ipotesi di Planck : $E_\nu = h \cdot \nu$
prevedeva inizialmente una relazione del tipo : $E = (n \cdot h_1) \cdot \nu$
in cui per ogni frequenza erano previsti oscillatori con un diverso contributo di energia.

In una fase successiva, per poter procedere nel calcolo, si è reso necessario scrivere la relazione nella forma $E = h_1 \cdot (n \cdot \nu_1)$, considerando così per tutti gli oscillatori la stessa costante di proporzionalità fra energia e frequenza della radiazione emessa.

254z26

Le frequenze emesse, **considerate possibili e conteggiate nel calcolo**, **sono dunque** :

$$\nu = n \cdot \nu_1 \qquad \text{con} \quad n = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Oggi sappiamo dall'esperienza, e la teoria degli spazi rotanti lo dimostra con il calcolo teorico, che **si ha una quantizzazione**, **non sono tutte queste le frequenze possibili**.
Il calcolo impostato da Planck non **era dunque corretto**, anche se il risultato finale si è rivelato corretto.

Considerando ora che quando venne analizzato lo **spettro di emissione del corpo nero** l'unica radiazione nota, che venne presa in considerazione, era quella atomica, riprendiamo l'espressione dell'energia E associata ai diversi livelli, limitandoci alla sola fascia elettronica :

$$E_\nu = h \cdot \nu(\mathbf{1}\,;\mathbf{1}) \cdot \left[Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{p^2} \right]$$

Il fattore h abbiamo visto che è legato all'elettrone **in equilibrio sulla prima orbita dell'atomo di idrogeno**, associato dunque a $Z = \mathbf{1}$ e $p = \mathbf{1}$, dato dalla relazione :

$$h(\mathbf{1}\,;\mathbf{1}) = \mathbf{2} \cdot \pi \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot R_{11e}$$

ed è uguale al momento angolare dell'elettrone in orbita.

Le energie possibili sono tutte e solo quelle legate alla transizione dal livello p_1 al livello p_2 . Si ha quindi :

$$E_{P_1 - P_2} = h(\mathbf{1}\,;\mathbf{1}) \cdot \nu(\mathbf{1}\,;\mathbf{1}) \cdot \left[Z^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{p_2^2} - \frac{\mathbf{1}}{p_1^2} \right) \right]$$

Escludendo per adesso tutti gli altri spazi rotanti, **se vogliamo descrivere le caratteristiche della radiazione emessa "dalla fascia elettronica" di tutti gli atomi conosciuti solo con due fattori**, **dobbiamo accorparne due**, in modo da ricondurci ad un'espressione del tipo :

254z27

$$E = h(z\,;\,p)\cdot\nu(1\,;\,1) \quad \text{oppure} \quad E = h(1\,;\,1)\cdot\nu(z\,;\,p)$$

Essendo, in questo caso, la radiazione emessa sempre da elettroni, ai quali è riferito il fattore h, l'esperienza ci dice che esiste una proporzionalità fra energia e frequenza della radiazione, **qualunque sia l'atomo emettitore**. Poniamo dunque :

$$h = h_e(1\,;\,1) = 2\cdot\pi\cdot m_e\cdot V_{11e}\cdot R_{11e}$$

$$\nu(z\,;\,p) = \nu(1\,;\,1)\cdot Z^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{p_2^2}-\frac{1}{p_1^2}\right)$$

Durante il passaggio dal livello p_1 al livello p_2, abbiamo visto che l'elettrone **percorrerebbe una traiettoria ellittica avente eccentricità** :

$$e = \sqrt{1-\frac{p_2^2}{p_1^2}}$$

e periodo : $$T_1 = \frac{T_{P_2}}{\left(1-e^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{T_{11e}\cdot p_2^3}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^3} = T_{11e}\cdot p_1^3$$

Quest'orbita non viene però percorsa tutta con lo stesso eccesso di energia, in quanto la particella non ritorna al punto di partenza. Si deve quindi pensare che, quando, dopo un semiperiodo, giunge al perielio, non risale all'afelio, ma sul livello p_2.

La durata dell'emissione, **ossia il periodo transitorio sarà quindi uguale alla somma dei due semiperiodi** :

$$T_t = \frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{2} = \frac{1}{2}\cdot T_{11e}\cdot\left(p_1^3+p_2^3\right)$$

La frequenza della radiazione risulta :

254z28

$$\nu(z\,;\,p) = \nu(1\,;\,1)\cdot Z^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{p_2^2}-\frac{1}{p_1^2}\right)$$

l'energia trasferita vale :

$$E_{P_1-P_2} = h_e(1\,;\,1)\cdot\nu(z\,;\,p)$$

Per chiarire quanto abbiamo visto, consideriamo per esempio un isotopo del ferro $(Z = 26)$ in cui si verifichi la transizione da $p_1 = \mathbf{4}$ a $p_2 = \mathbf{3}$.

La durata della perturbazione vale :

$$T_t(4;3) = T_{11e}\cdot\frac{p_3^3 + p_4^3}{2} = \mathbf{6.91522582\cdot 10^{-15}}\,\mathrm{sec}$$

la frequenza della radiazione :

$$\nu(26\,;4\!-\!3) = \nu(1\,;\,1)\cdot \mathbf{26}^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)$$

$$\nu(26\,;4\!-\!3) = \mathbf{3.289841951\cdot 10^{15}}\,H_z\cdot\ \mathbf{0.426629726} = \mathbf{1.40354437\cdot 10^{15}}\,H_z$$

la lunghezza d'onda della radiazione emessa risulta :

$$\lambda(26\,;4\!-\!3) = \frac{C_l}{\nu_e(26\,;4\!-\!3)} = \frac{\mathbf{2.99792458\cdot 10^{8}}\,\frac{m}{sec}}{\mathbf{1.40354437\cdot 10^{15}}\,H_z} = \mathbf{213.5967\cdot 10^{-9}}\,m$$

Il numero di oscillazioni di lunghezza d'onda $\lambda(26\,;4\!-\!3)$ che formano il fotone risulta :

$$n = T_t(4;3)\cdot\nu(26\,;4\!-\!3) = \mathbf{9.705826}$$

e quindi l'estensione del fotone nella direzione del moto :

$$L_f = n\cdot\lambda(26\,;4\!-\!3) = \mathbf{2.073\cdot 10^{-6}}\,m$$

Riprendiamo ora l'espressione teorica della costante di Planck :

$$h_e = \mathbf{2}\cdot\pi\cdot m_e\cdot V_{11e}\cdot R_{11e} = (\mathbf{2}\cdot\pi\cdot\nu_{11e})\cdot R_{11e}\cdot m_e\cdot V_{11e}\cdot\frac{1}{\nu_{11e}}$$

254z29

$$= \omega_{11e} \cdot R_{11e} \cdot m_e \cdot V_{11e} \cdot \frac{1}{\nu_{11e}} = \frac{m_e \cdot V_{11e}^2}{\nu_{11e}} = \frac{2 \cdot E_{11e}}{\nu_{11e}}$$

Abbiamo visto che un'onda elettromagnetica, per poter trasferire nello spazio l'energia che viene trasferita da una massa in moto con la velocità V_m , deve avere una velocità di fase $V_f = \frac{V_m}{2}$. In termini di frequenze : $\nu = \frac{\nu_{11e}}{2}$

Si ha dunque : $h_e = \frac{E_{11e}}{\nu}$ e quindi : $E_{11e} = h_e \cdot \nu$

Questa relazione ci dice che la costante di Planck **rappresenta la costante di proporzionalità fra** l'energia di equilibrio dell'elettrone sulla orbita fondamentale dello spazio rotante del protone e la frequenza della radiazione capace di trasferire la stessa energia.
Una estensione della relazione a qualsiasi atomo si ottiene moltiplicando :

$$E_{11e} \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2} = h_e \cdot \nu \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2}$$

Al primo membro abbiamo l'energia di legame, sempre dell'elettrone, in moto sull'orbita p dell'atomo di numero atomico Z , $E_e(Z;p)$.
Al secondo membro si ha :

$$\nu \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2} = \frac{\nu_{11e}}{2} \cdot \frac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2} = \frac{\nu_e(Z;p)}{2} = \nu(Z;p)$$

sostituendo, si ottiene quindi l'espressione generalizzata :

$$E_e(Z;p) = h_e \cdot \nu(Z;p)$$

La costante di Planck rappresenta così la costante di proporzionalità

254z30

tra l'energia cinetica di un elettrone in equilibrio, **su qualsiasi orbita di qualsiasi atomo**, **e la frequenza di un'onda elettromagnetica capace di trasferire nello spazio la stessa energia**.

Se nell'espressione poniamo : $\nu(Z;p) = \mathbf{1}\,H_z$

che equivale a : $\nu_e(Z;p) = \mathbf{2}\,H_z$

si ottiene : $h_e = E_e(Z;p)_{2H_z}$

Questa relazione ci dice che : **la costante di Planck rappresenta l'energia di legame di un elettrone che percorre con una frequenza orbitale di 2** H_z **un'orbita di uno spazio rotante di qualsiasi tipo**.

Ricordando che : $E_e(Z;p) = E_{11e} \cdot \dfrac{Z^{\frac{2}{3}}}{p^2}$

sostituendo, sarà possibile ricavare **il valore del numero quantico** p_h con il quale l'energia di equilibrio dell'elettrone è uguale alla costante di Planck :

$$p_h = \left(\frac{E_{11e}}{h_e}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot Z^{\frac{1}{3}} = 57.35714363 \cdot 10^6 \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

Per $Z = \mathbf{1}$ si ricavano le caratteristiche orbitali dell'elettrone :

$$R_h = 174090.95\,m \quad ; \quad V_h = 38.14156837 \cdot 10^{-3}\,\frac{m}{sec}$$

Si tratta sostanzialmente di un elettrone fermo, fuori dall'azione dello spazio rotante.

Abbiamo visto che, quando una massa m si sposta nello spazio rotante dalla distanza R sull'orbita circolare minima $R_{eq} < R$, l'energia che viene emessa **dallo spazio rotante** è uguale all'eccesso ΔE_e , rispetto al valore E_{eq} che è necessario affinchè la massa possa restare in equilibrio sull'orbita R_{eq} .

Nel caso di un elettrone, essa è uguale a quella trasferita dalla **radiazione**

254z31

elettromagnetica di frequenza data : $\nu = \dfrac{\Delta E_e}{h_e}$

avente una durata uguale a quella del regime transitorio (**periodo orbitale**). In definitiva si ha un pacchetto di oscillazioni alla frequenza ν con una durata complessiva uguale a un periodo orbitale.

A questo punto osserviamo che le relazioni sono applicabili fino alla distanza $R \to \infty$, corrispondente a $p \to \infty$, $V_{eq} \to 0$, $E_{eq} \to 0$.
La condizione di equilibrio coincide quindi con l'elettrone **fermo ed energia totale** uguale a zero.

Se nello stesso punto abbiamo un elettrone in moto con una velocità V_e, **il valore dell'energia cinetica coincide con l'eccesso** ΔE_e che lo spazio rotante emetterebbe come un "**pacchetto di radiazione elettromagnetica**" se l'elettrone si spostasse sull'orbita associata a $p \to \infty$, raggiungendo la condizione di equilibrio con $V_{eq} \to 0$ e $E_{eq} \to 0$.

la frequenza della radiazione emessa **sarebbe** : $\nu = \dfrac{\Delta E_e}{h_e}$

con una **durata dell'emissione** : $T_e(\infty) = T_{11e} \cdot p_\infty^3 \to \infty$.

In pratica, in questo caso, non si ha **un pacchetto** di oscillazioni limitato nello spazio e nel tempo, ma una **oscillazione continua e illimitata avente frequenza**:

$$\nu = \frac{\nu_e}{2} = \frac{\Delta E_e}{h_e} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot V_e^2 \cdot \frac{1}{h_e} \quad ; \quad \frac{\nu_e}{V_e} = \frac{m_e \cdot V_e}{h_e}$$

che si può scrivere :

$$\frac{V_e}{\nu_e} = \frac{h_e}{m_e \cdot V_e}$$

Il primo membro rappresenta **la lunghezza d'onda** λ_e corrispondente alla frequenza di rivoluzione ν_e dell'elettrone, che si muove sull'orbita associata a $p \to \infty$, con la velocità V_e.

254z32

Si può dunque scrivere : $$\lambda_e = \frac{h_e}{m_e \cdot V_e}$$

Questa relazione può essere generalizzata **agli elettroni** in equilibrio su tutte le orbite stabili, considerando che in questo caso l'energia dell'elettrone è di

segno negativo e vale : $E_{eq} = -\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot V^2_{eq}$.

Rispetto all'elettrone fermo sull'orbita $p \rightarrow \infty$ si ha quindi un difetto di energia e quindi l'energia $\Delta E = E_{eq}$ rappresenta **il valore dell'energia raggiante che bisogna fornire per fermare l'elettrone**, **portandolo sull'orbita** p_∞ **.**
Si avrà comunque :

$$\lambda_e = \frac{h_e}{m_e \cdot V_{eq}} = \frac{h_e}{m_e} \cdot \frac{p}{V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}}$$

posto : $$\lambda_{11e} = \frac{h_e}{m_e \cdot V_{11e}}$$

si ottiene :

$$\lambda_e = \frac{h_e}{m_e \cdot V_{eq}} = \lambda_{11e} \cdot \frac{p}{Z^{\frac{1}{3}}} = 2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot \frac{p}{Z^{\frac{1}{3}}}$$

Si noti che λ_e rappresenta la lunghezza d'onda **associata alla transizione dall'orbita** p_∞ **a quella di equilibrio associata al numero quantico** p **.**

L'emissione di energia raggiante si verifica solo durante la transizione **e quindi** λ_e **è definita ed ha significato solo durante il periodo di transizione**. In condizioni stazionarie non ha nessun significato.

Per gli elettroni in equilibrio sulle orbite, dunque in cundizioni stazionarie, **la**

254z33

sola lunghezza d'onda che si può definire è quella associata al moto di rivoluzione λ_{eq} **ed indica lo spazio percorso in un periodo** T_{eq} , che quindi risulta :

$$\lambda_{eq} = V_{eq} \cdot T_{eq} = \frac{V_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}}}{p} \cdot \left(T_{11e} \cdot p^3\right) = V_{11e} \cdot T_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$$

e quindi : $$\lambda_{eq} = 2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2 = 2 \cdot \pi \cdot R_{eq}$$

diversa da λ_e e non è associata ad alcuna grandezza variabile nel tempo.

Tutta la ricostruzione che abbiamo fatto mette in evidenza che **la costante di Planck è stata ricavata solo con riferimento all'atomo ed in particolare alla fascia elettronica**.

Essa è quindi intimamente legata al valore dello spazio rotante del protone e alle caratteristiche fisiche dell'elettrone e non è utilizzabile in altri spazi rotanti con masse orbitanti diverse dall'elettrone.

Se abbiamo, uno spazio rotante K_s^2, comunque generato, atomico, nucleare o astronomico, rifacendo il percorso di Planck, otteniamo la stessa relazione:

$$E = h_m \cdot \nu \qquad \text{con} \quad E = E_\nu = E_{eq}$$

dove E rappresenta l'energia di legame **della massa** m in moto su un'orbita stabile dello spazio rotante K_s^2, ν è la frequenza della radiazione capace di trasferire nello spazio la stessa energia e quindi capace anche di rimuovere la massa m , portandola fuori dallo spazio rotante e h_m rappresenta la solita costante di proporzionalità, riferita a questo caso.

Si ricava dunque : $$E_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{eq}^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{eq} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{eq}}{T_{eq}}$$

con qualche semplice sostituzione :

$$E_{eq} = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot p \cdot \frac{1}{2 \cdot T_{eq}}$$

254z34

sostituendo ancora la frequenza di rivoluzione ν_{eq} , si ottiene :

$$E_{eq} = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot p \cdot \frac{\nu_{eq}}{2}$$

uguagliando E_{eq} all'energia trasferita dalla radiazione $E_\nu = h_m \cdot \nu$, si ha:

$$2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot p \cdot \frac{\nu_{eq}}{2} = h_m \cdot \nu$$

Questa relazione si applica a qualsiasi spazio rotante, **che potrà anche non presentare alcun legame con l'elettrone**, di cui si può ignorare l'esistenza.

Se ripercorriamo la strada indicata trattando lo spazio rotante atomico, in cui la particella in orbita è l'elettrone, poniamo :

$$h_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s}$$

$$\nu = \frac{\nu_{eq}}{2} \cdot Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot p = \frac{\nu_{11e}}{2} \cdot \left(Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

L'espressione della frequenza ν della radiazione coincide con quella ricavata per la fascia elettronica dell'atomo.

Per quanto riguarda la costante di proporzionalità h_m , l'espressione fornita coincide esattamente con quella scritta con riferimento alla fascia elettronica dell'atomo e fornisce il valore minimo del momento angolare della particella in orbita nello spazio rotante considerato.

Non abbiamo dunque alcun motivo valido per fornire una relazione diversa.

Dal punto di vista formale **è tuttavia possibile assumere l'elettrone come riferimento per le particelle in orbita e il protone come generatore dello spazio rotante**.

Avendo posto $Z_s = \frac{K_s^2}{K_p^2}$ abbiamo assunto **per qualsiasi spazio rotante** il protone come unità elementare della massa solare generatrice e quindi si

254z35

ha : $R_{11s} \cdot V_{11s}^2 = K_p^2$

indipendentemente dal tipo di spazio rotante. Si ha quindi :

$$h_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s} = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s}^2 \cdot \frac{1}{V_{11s}}$$

in generale sarà: $h_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot \dfrac{K_p^2}{V_{11s}}$

Per rapportare questo valore al valore ricavato per la fascia elettronica dello atomo, sostituiamo ancora : $m = \dfrac{m}{m_e} \cdot m_e$; $V_{11s} = \dfrac{V_{11s}}{V_{11e}} \cdot V_{11e}$

e si ottiene : $h_m = h_e \cdot \left(\dfrac{m}{m_e} \cdot \dfrac{V_{11e}}{V_{11s}} \right)$

Se si vuole dare valore universale alla costante di Planck

$$h_m = h_e = h = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11e} \cdot V_{11e} = 6.6260755 \cdot 10^{-34} \, j \cdot sec$$

il fattore in parentesi deve essere trasferito alla frequenza, **ponendo** :

$$\nu = \left(\frac{m}{m_e} \cdot \frac{V_{11e}}{V_{11s}} \right) \cdot \frac{\nu_{11s}}{2} \cdot \left(Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

si ottiene così la relazione : $E_\nu = h \cdot \nu$

E' chiaro che, se si sposta solo un fattore, il valore dell'energia che si ottiene non cambia. Cambia però la frequenza ν della radiazione emessa e questo è un fatto che ha implicazioni fisicamente importanti.

Non esiste però nessuna ragione teorica per fare questa scelta.

Inoltre, la costanza del valore di h in spazi rotanti con masse orbitanti diverse crea una contraddizione logica nel processo di emissione della radiazione.

254z36

Secondo le teorie correnti la radiazione elettromagnetica è formata da fotoni, che sono pacchetti d'onda che trasferiscono nello spazio un valore di energia **dipendente solo dalla frequenza**.

Fotoni che hanno la stessa frequenza sono uguali tra loro.
Non possono quindi esistere fotoni che trasferiscono energia diversa con la stessa frequenza.

Per aumentare l'energia trasmessa a una data frequenza è necessario aumentare il numero di fotoni e non è possibile, per esempio, aumentare l'ampiezza delle oscillazioni, come succede per qualsiasi altro tipo di onda, in quanto essa non viene considerata una caratteristica significativa del fotone.

Trattando l'interazione di un'onda elettromagnetica con la materia, abbiamo visto che esiste un valore minimo della frequenza della radiazione capace di accelerare **fino all'espulsione gli elettroni** in moto sulle orbite dello spazio rotante atomico.

Lo stesso limite si riliva sperimentalmente studiando **l'effetto fotoelettrico** e questo accade perchè il trasferimento dell'energia necessaria per accelerare l'elettrone fino alla velocità di fuga deve realizzarsi entro un periodo orbitale. Pacchetti d'onda con valori di frequenza minori di questo limite non vengono assorbiti dalla particella in orbita.

Per accelerare l'elettrone fino alla velocità di fuga nel tempo richiesto, **a nulla serve aumentare il numero di fotoni incidenti con la stessa frequenza**, in quanto per il trasferimento si deve proprio avere un minimo di sincronismo fra la frequenza del fotone e quella di rivoluzione dell'elettrone.

Supponiamo ora di poter realizzare il seguente esperimento.
Abbiamo n_e elettroni in moto equilibrato sull'orbita p dello spazio rotante di un atomo con Z_s protoni nucleari.
L'energia di legame di ciascun elettronein orbita vale E_{eq1} ed è uguale alla energia $E_{\nu 1}$ della radiazione disponibile, secondo la relazione :

$$E_{\nu 1} = h_e \cdot \nu_1 = E_{eq1}.$$

Inviando **simultaneamente n_e fotoni** sull'orbita otteniamo l'emissione di n_e **elettroni simultaneamente**. In definitiva abbiamo fornito l'energia :

254z37

$$n_e \cdot E_{\nu 1} = n_e \cdot \left(h_e \cdot \nu_1\right) = n_e \cdot E_{eq1} = n_e \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot V_{eq}^2\right)$$

Sappamo che nello spazio rotante le caratteristiche orbitali **dipendono solo dalla sfera solare**, che genera lo spazio rotante e non dal valore delle masse in moto sulle orbite.

A parte qualche problema, superabile, di stabilità del sistema, supponiamo di sostituire gli n_e, elettroni presenti sull'orbita, con un solo aggregato di massa $m = n_e \cdot m_e$.

Secondo l'equazione fondamentale degli spazi rotanti $V_{eq}^2 \cdot R_{eq} = K_s^2$ il nuovo aggregato si muoverà sull'orbita ancora con la velocità V_{eq} e quindi con un'energia cinetica (energia di legame) data da :

$$E_{eq} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V_{eq}^2 = n_e \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_e \cdot V_{eq}^2\right)$$

Dato che la frequenza del moto orbitale non è cambiata rispetto al caso in cui avevamo gli n_e elettroni, se inviamo sulla massa $m = n_e \cdot m_e$ ancora gli n_e fotoni "**simultaneamente**", aventi **la stessa frequenza** ν_1 e **la stessa fase**, ciascuno di essi si trova, **come prima**, nelle giuste condizioni dinamiche per fornire il contributo **1**/ n_e all'impulso necessario per accelerare la massa m, che raggiunge così la velocità di fuga.

Se gli elettroni si trovano sulla stessa orbita in condizioni di moto identiche, il fatto che essi siano indipendenti o aggregati in una sola massa non cambia la dinamica del processo.

E' dunque possibile produrre l'emissione di una massa $m = n_e \cdot m_e$ con i fotoni utilizzati nel modo che abbiamo indicato, anche se la loro frequenza è appena sufficiente per espellere un solo degli elettroni aggregati.

Questo risultato contraddice però l'ipotesi secondo la quale, per espellere la massa con energia di legame $E_{eq} = \frac{1}{2} \cdot \left(n_e \cdot m_e\right) \cdot V_{eq}^2$, si debba impiegare un solo fotone caratterizzato da una frequenza $\nu = \left(n_e \cdot \nu_1\right)$ e quindi energia :

254z38

$$E_{\nu} = h_e \cdot \nu = h_e \cdot \left(n_e \cdot \nu_1\right) = E_{eq}$$

Se scriviamo questa relazione nella forma equivalente :

$$E_{\nu} = \left(n_e \cdot h_e\right) \cdot \nu_1 = h_m \cdot \nu_1 = E_{eq}$$

è facile verificare che, moltiplicando la costante h_e per n_e si "costruisce" un fotone perfettamente equivalente agli n_e precedenti, considerati coerenti ed agenti simultaneamente, con la stessa frequenza ν_1.

Se ora consideriamo il processo inverso, quando la massa m, partendo da una distanza $R \to \infty$, giunge sull'orbita, viene emesso un fotone che ha una frequenza dipendente **unicamente** dalle condizioni di moto che si realizzano sull'orbita che, per quanto abbiamo visto, sarà uguale a ν_1 con una energia uguale a quella di legame E_{eq}, secondo la relòazione :

$$E_{\nu} = h_m \cdot \nu_1 = E_{eq}$$

La costante di Planck, che, con riferimento alla fascia elettronica dell'atomo, abbiamo indicato con h_e, assume un valore dipendente dalla massa in orbita sulla fascia periferica dell'atomo, l'elettrone.

La sua caratteristica di "costante universale" è legata unicamente alla universalità dell'elettrone nell'atomo.

In uno spazio rotante diverso, nel quale l'elettrone non compare come massa orbitante o non compare affatto, come, per esempio, nel nucleo atomico, non è possibile che la costante h assuma un valore dipendente da una particella **inesistente**.

Consideriamo quindi la costante di Planck nella sua forma più generale :

$$h_m = 2 \cdot \pi \cdot m \cdot R_{11s} \cdot V_{11s} = h_e \cdot \left(\frac{m}{m_e} \cdot \frac{V_{11e}}{V_{11s}} \right)$$

Ricordiamo che per lo spazio rotante nucleare abbiamo ricavato :

254z39

$$\frac{V_{11e}}{V_{11s}} = \left(\frac{m_e}{m_p}\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad m = \frac{3}{4} \cdot m_p$$

sostituendo si ha :

$$h_m = h_e \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{\frac{1}{2}} = 3.011528973 \cdot 10^{-32}\, j \cdot sec$$

sostituendo i valori numerici si ottiene :

$$h_p = 32.13776478 \cdot h_e = 2.129472558 \cdot 10^{-32}\, j \cdot sec$$

La frequenza della radiazione che bisogna fornire per estrarre un protone dal livello nucleare p di un atomo di numero atomico Z, vale :

$$\nu = \frac{\nu_{11s}}{2} \cdot \left(Z_s^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2}\right) = \frac{\nu_{11s}}{2} \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2}\right)$$

ricordando che : $\nu_{11s} = \nu_{11e} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} = 19669.94845 \cdot \nu_{11e}$

numericamente si ottiene :

$$\nu = 6.471102159 \cdot 10^{19}\, H_z \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2}\right)$$

Per esempio, per poter produrre l’espulsione **di un protone** dal quarto livello nucleare di un atomo di stagno ($Z = \mathbf{50}$; $p = \mathbf{4}$), trascurando per il momento l’energia richiesta per altre transizioni connesse, è necessario un fotone con frequenza :

$$\nu(50 ; 4) = 6.471102159 \cdot 10^{19}\, H_z \cdot \left(50^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4^2}\right) = 5.489148 \cdot 10^{19}\, H_z$$

ed energia :

254z40

$$E_\nu(50\,;4) = h_p \cdot \nu(50\,;4) = \mathbf{7.2957}\ \text{MeV}$$

L'energia di legame del protone sul quarto livello nuleare, utilizzando il valore dell'energia per strato riportata a pag. 861 , vale :

$$E_{eq}(50\,;4) = \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot V_{eq}^2 = \frac{E_0(50)}{2 \cdot p^2} = \frac{\mathbf{232.87}\ \text{MeV}}{2 \cdot 4^2} = \mathbf{7.2772}\ \text{MeV}$$

in buon accordo con l'energia associata alla radiazione nucleare calcolata.

Se si utilizza **la costante di Planck con valore universale**, si pone :

$$h_p = h_e = h = \mathbf{6.6260755 \cdot 10^{-34}}\ \text{j} \cdot \text{sec}$$

e si sposta il secondo fattore sulla frequenza, che diventa :

$$\nu = \nu_{11e} \cdot \frac{3}{32} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^2 \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

sostituendo i valori numerici :

$$\nu = \mathbf{2.079667591 \cdot 10^{21}}\ H_z \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

Come si può vedere, considerando la costante di Planck indipendente dallo spazio rotante la frequenza della radiazione associata ai livelli nucleari risulta maggiore di un fattore uguale a **32,13776478** , ma il valore dell'energia è data comunque dalla relazione :

$$E_\nu = h_p \cdot \nu = \mathbf{8.6008173}\ \text{MeV} \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right)$$

Se consideriamo, per esempio la transizione di un protone dalla quinta orbita alla quarta in un nucleo di neodimio ($Z = \mathbf{60}$), la radiazione γ emessa avrà :
– energia :

$$E_\nu(60\,;5-4) = h_p \cdot \nu = \mathbf{8.6008173}\ \text{MeV} \cdot \mathbf{60}^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{16}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{25}} \right)$$

254z41

eseguendo i calcoli : $E_{\nu}(60\,;\,5-4) = \mathbf{2.9659}\,\text{MeV}$

– frequenza :

$$\nu = \mathbf{2.079667591 \cdot 10^{21}}\,H_z \cdot \left(Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{p^2} \right) = \mathbf{7.17150971 \cdot 10^{20}}\,H_z$$

Una maggiore precisione si ottiene utilizzando l'energia per strato:

$$E_{\nu}(60\,;\,5-4) = E_0(60) \cdot \left(\frac{1}{2 \cdot p_2^2} - \frac{1}{2 \cdot p_1^2} \right)$$

$$E_{\nu}(60\,;\,5-4) = \mathbf{255.76}\,\text{MeV} \cdot \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{50} \right) = \mathbf{2.8773}\,\text{MeV}$$

254z42