–Lente gravitazionale e calcolo teorico della deviazione della luce in presenza di un campo gravitazionale

Trattando la teoria generale degli spazi rotanti, abbiamo visto che, quando le masse planetarie sono trascurabili rispetto a quella centrale, che genera lo spazio rotante, la geometria delle orbite risulta praticamente indipendente dal valore delle masse.

Abbiamo anche visto che i punti " dello spazio fisico " circostante un aggregato materiale rotante su se stesso raggiungono la condizione di equilibrio con un moto su particolari orbite, circolari e discrete, che vengono caratterizzate dai valori :

$$R_n = \frac{R_1}{n^2} \quad ; \quad V^2_{eq} = \frac{K^2}{R_n}$$

Tra due orbite consecutive R_n ed R_{n+1} non è possibile trovare alcuna orbita circolare di equilibrio stabile.

Se dunque, sull'orbita dello spazio rotante avente raggio R_n, mettiamo una particella materiale avente velocità V^2 rispetto al centro dello spazio rotante, e risulta $V^2 = V^2_{eq}$, essa risulta in equilibrio e si mantiene ad una distanza dal centro $R_n =$ **costante**.

Tutte queste circostanze possono essere verificare facilmente considerando il problema sotto l'aspetto energetico.

Il lavoro che lo spazio rotante compie per spostare la massa m da $R = \infty$ alla distanza R dal centro vale:

$$L = \int_\infty^R F(R)\, dR = \int_\infty^R - \frac{K^2}{R^2}\, m\, dR = m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se si considera il sistema conservativo, la massa m acquista una energia potenziale:

$$E_p = -L = -m \cdot \frac{K^2}{R}$$

Se indichiamo con E_c il valore dell'energia cinetica posseduta dalla massa in moto, la sua energia totale, nel caso più generale risulta : $E_c = E_c + E_p$
e quindi :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 - m \cdot \frac{K^2}{R} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left[\dot{R}^2 + \left(R \cdot \dot{\vartheta}\right)^2 \right] - m \cdot \frac{K^2}{R}$$

dalla quale si ricava :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \frac{2 \cdot K^2}{R} - \left(R \cdot \dot{\vartheta}\right)^2$$

Se il momento delle forze esterne, **rispetto al centro di rotazione**, **vale zero**, si verifica la conservazione del momento angolare e quindi si ha :

$$\left(R \cdot \dot{\vartheta}\right)^2 = \frac{C^2}{R^2}$$

che, sostituita nella precedente relazione, fornisce :

$$\dot{R}^2 = \frac{2 \cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C} \right]^2 - \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C} \right]^2$$

Se viene verificato anche il principio di conservazione dell' energia, **si ha anche** $E =$ **costante** e quindi si può porre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2 \cdot E}{m} + \left[\dfrac{K^2}{C} \right]^2 = \alpha^2 \\ \left[\dfrac{C}{R} - \dfrac{K^2}{C} \right]^2 = u^2 \end{array} \right\}$$

256

da cui si ricava : $$du = -\frac{C}{R^2}\,dR$$

sostituendo, si ottiene l' equazione differenziale : $\dot{R}^2 = \alpha^2 - u^2$

equivalente a: $$\frac{dR}{dt} = \pm\sqrt{\alpha^2 - u^2}$$

Questa relazione ha un campo di esistenza, **dunque si può realizzare**, **fisicamente**, **solo per** :

$$\alpha^2 \geq u^2$$

e quindi per :

$$\frac{2\cdot E}{m} + \left[\frac{K^2}{C}\right]^2 \geq \left[\frac{C}{R} - \frac{K^2}{C}\right]^2$$

ovvero :

$$\frac{2\cdot E}{m}\cdot R^2 + 2\cdot K^2\cdot R - C^2 \geq 0$$

che si può anche scrivere :

$$\left[\frac{2\cdot E}{m}\cdot R + 2\cdot K^2\right] \geq \frac{C^2}{R}$$

Ricordando che :

$$E = E_c + E_p = \frac{1}{2}\,m\,V^2 - m\,\frac{K^2}{R} = \frac{1}{2}\cdot m\,v^2 - m\,V_{eq}^2$$

si ha :

$$\frac{2\cdot E}{m} = v^2 - 2\cdot V_{eq}^2 \qquad \text{con} \qquad V_{eq}^2 = \frac{K^2}{R}$$

257

In definitiva quindi, per poter avere soluzioni reali, dovrà essere verificata la condizione fondamentale :

$$\left[v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right] \cdot R + \mathbf{2} \cdot K^2 \geq \frac{C^2}{R}$$

Il valore della costante C si ricava considerando la relazione con la velocità areolare del punto sull'orbita :

$$V_a = \frac{\mathbf{dA}}{\mathbf{dt}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{dl}}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{d}\vartheta}{\mathbf{dt}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \left(R^2 \cdot \dot{\vartheta}\right) = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{2}}$$

si ha dunque, in definitiva : $C = 2 \cdot V_a$

Su ogni orbita circolare di raggio R_n , si avrà quindi :

$$C_n = V_n \cdot R_n = K \cdot R_n^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad V_{eqn} = \left(\frac{K^2}{R_n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

In uno studio grafico dello spazio rotante, si avrà dunque la serie di curve :

$$\left[v^2 - 2 \cdot V_{eqn}^2\right] \cdot R + 2 \cdot K^2 \geq \frac{C_n^2}{R}$$

Per una più facile lettura dei risultati grafici, risolviamo anche analiticamente il sistema :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{R}^2 = \left[v^2 - 2 \cdot V_{eqn}^2\right] + \dfrac{2 \cdot K^2}{R} - \left[R \cdot \dot{\vartheta}\right]^2 \\ R^2 \cdot \dot{\vartheta} = C \end{array} \right\}$$

258

equivalente a :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \pm\sqrt{\alpha^2 - u^2} \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \frac{C}{R^2} \end{aligned} \right\}$$

da cui deriva l'equazione :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \pm \frac{C}{R^2\sqrt{\alpha^2 - u^2}}$$

essendo :

$$\frac{d\vartheta}{dR} = \frac{d\vartheta}{du} \cdot \frac{du}{dR} = -\frac{C}{R^2} \cdot \frac{d\vartheta}{du}$$

sostituendo si ottiene :

$$d\vartheta = \pm \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}} \cdot du \quad \text{con} \quad \alpha^2 > u^2$$

Integrando, si ricava l'equazione della traiettoria :

$$R = \frac{P}{1 + e \cdot \cos\theta} \;;\; P = \frac{C^2}{K^2} \;;\; e = \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4}\left[v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right]}$$

Per tutto lo spazio rotante, con semplici sostituzioni si ricava :

$$P_n = \frac{C_n^2}{K^2} = \frac{K^2 \cdot R_n}{K^2} = R_n$$

259

$$e = \sqrt{1 + \frac{R_n}{K^2}\left[v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right]} = \sqrt{\frac{v^2}{V_{eqn}^2} - 1} = \sqrt{\frac{v^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

Tutte le traiettorie stabili possibili, **in uno spazio rotante caratterizzato dal valore** K^2 , **saranno dunque descritte dalle relazioni** :

$$R = \frac{R_n}{1 - e \cdot \cos\theta} \quad ; \quad e = \sqrt{\frac{v^2 \cdot R_n}{K^2} - 1}$$

con : $$n = 1 \; ; \; \sqrt{\tfrac{4}{3}} \; ; \; \sqrt{2} \; ; \; 2 \; ; \; 3 \; ; \cdots \; n_s$$

E' **quindi possibile avere** soluzioni reali, **e quindi orbite stabili**, **solo per** $V^2 \cdot R_n > K^2$ **che equivale a** $\alpha^2 > u^2$.

Per chiarire quanto è stato esposto può essere utile uno studio grafico.

Ricaviamo innanzitutto gli estremi del campo di esistenza delle orbite stabili su ciascuna falda dello spazio rotante.

Riprendendo la condizione :

$$\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right) \cdot R^2 + 2 \cdot K^2 \cdot R - C \geq 0$$

e risolvendo, si ricavano gli estremi :

$$R = \frac{K^2}{\left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right)} \cdot \left[-1 \pm \sqrt{1 + \frac{C^2}{K^4} \cdot \left(v^2 - 2 \cdot V_{eq}^2\right)} \right]$$

Dovendo essere, per la realtà fisica, necessariamente $R \geq 0$, le soluzioni accettabili risultano le seguenti :

259a

1 – con $\left(\mathbf{v}^2 - \mathbf{2}\cdot V_{eq}^2\right) > \mathbf{0}$ equivalente a $\mathbf{v^2} > \dfrac{\mathbf{2}\cdot K^2}{R}$ oppure, indicando con V_f la velocità di fuga dall'orbita, $v > \sqrt{\mathbf{2}}\cdot V_{eq} = V_f$ si ottiene :

$$R > \frac{K^2}{\left(\mathbf{v^2} - \mathbf{2}\cdot V_{eq}^2\right)}\cdot\left[\sqrt{\mathbf{1} + \frac{C^2}{K^4}\cdot\left(\mathbf{v}^2 - \mathbf{2}\cdot V_{eq}^2\right)} - \mathbf{1}\right]$$

In questo caso, **si ha un solo punto di inversione della velocità radiale e ne risulta così una traiettoria aperta**.

Se indichiamo con r_0 l'unico punto in cui la traiettoria risulta perpendicolare al raggio vettore (**perielio**), si avrà :

$$\dot{R} = 0 \;\; ; \;\; v = v_0 \;\; ; \;\; C = r_0 \cdot v_0 \;\; ; \;\; V_{eq}^2 = \frac{K^2}{r_0}$$

e quindi, sostituendo, si ha :

$$\frac{K^2}{\left(\mathbf{v^2} - \mathbf{2}\cdot V_{eq}^2\right)} = \frac{r_0}{\left(e - \mathbf{1}\right)}$$

dalla quale si ricava la relazione : $$e = \left[\frac{\mathbf{v_0^2 \cdot r_0}}{\mathbf{K^2}} - \mathbf{1}\right]$$

e, in definitiva, con $\mathbf{e} > \mathbf{1}$ risulta :

$$R > \frac{r_0}{\left(e - \mathbf{1}\right)}\cdot\left(e - \mathbf{1}\right) = r_0$$

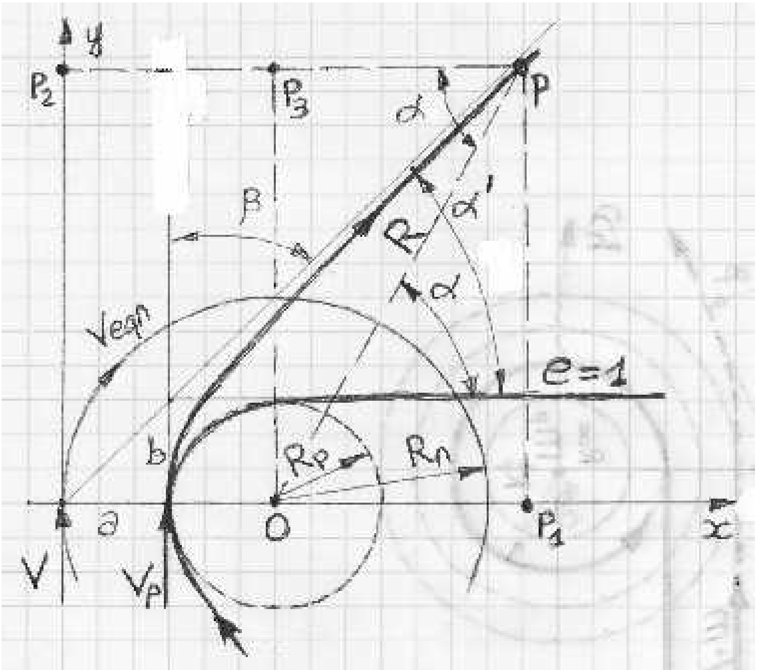
L'espressione analitica della traietoria è una iperbole espressa da :

259b

$$R = \frac{R_n}{1 - e \cdot \cos\vartheta} \qquad \text{con} \quad e > 1$$

Nella teoria generale degli spazi rotanti abbiamo visto che l'equazione della orbita associata all'equilibrio, in coordinate polari con origine nel centro dello spazio rotante, risulta indipendente dalla massa che la percorre ed è descritta dalla relazione che, con riferimento alla figura, è determinata dalla definizione

di eccentricità : $e = \dfrac{\overline{PO}}{\overline{PP_2}} = \dfrac{\overline{PO}}{\overline{PP_3} + \overline{P_3P_2}} = \dfrac{R}{R \cdot \cos\alpha + \overline{P_3P_2}}$



Negli spazi rotanti si ha : $\overline{P_3P_2} = R_n$

sostituendo, si ricava l'equazione generale dell'orbita :

$$R = \frac{R_n}{1 - e \cdot \cos\alpha}$$

in cui R_n rappresenta il raggio dell'orbita circolare stabile minima sulla quale la massa possiede il valore **minimo di energia** specifica richiesta per poter restare in equilibrio nella falda associata al numero quantico **n.**

259c

Per $0 \leq e < 1$ **l'orbita risulta ellittica** e, se è noto l'afelio oppure il perielio, R_n si ricava dalle relazioni :

$$R_n = (1 - e) \cdot R_A \quad ; \quad R_n = (1 + e) \cdot R_P$$

Ricordando che il valore del semiasse maggiore dell'orbita ellittica vale :

$$R = \frac{R_P + R_A}{2}$$

si ha anche : $R_n = \left(1 - e^2\right) \cdot R \quad ; \quad V_A^2 \cdot R_A + V_P^2 \cdot R_P = 2 \cdot K^2$

applicando la seconda legge di Keplero ((costanza della velocità angolare) si ricavano le velocità :

$$V_P = V \cdot \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \quad ; \quad V_A = V \cdot \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}}$$

che, utilizzando l'equazione fondamentale degli spazi rotanti : $K^2 = V^2 \cdot R$, **per orbite ellittiche**, si può scrivere :

$$e = \sqrt{1 - \frac{R_n}{R}} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_n^2}} = \sqrt{\frac{V_n^2 - V^2}{V_n^2}} = \sqrt{\frac{\Delta E}{E_n}}$$

risultato che abbiamo ottenuto per altra via, con ΔE **uguale all'energia che viene fornita dall'esterno alla massa in orbita**.

Quando l'energia fornita ΔE è uguale all'energia di legame della massa in orbita, la velocità diventa uguale a quella di fuga dall'orbita : $V_f = \sqrt{2} \cdot V_n$ e l'orbita diventa parabolica, con l'allontanamento definitivo della massa dallo spazio rotante. L'eccentricità ha così raggiunto il valore $e = 1$.

In questo caso **l'unico punto** in corrispondenza del quale il raggio vettore è perpendicolare alla velocità orbitale, e quindi si ha l'inversione della velocità radiale, **è il perielio**, che si trova in corrispondenza di $\alpha = \pi$.

Dall'espressione della traiettoria si ottiene quindi :

259d

$$R_p = \frac{R_n}{1 - e \cdot \cos\alpha} = \frac{R_n}{1 - 1 \cdot \cos(\pi)} = \frac{R_n}{2}$$

Se l'energia fornita dall'esterno alla massa in orbita, è maggiore di E_n , si ha $e > 1$, **con una velocità maggiore del valore di fuga e l'orbita diventa iperbolica**, sempre con il perielio che rimane l'unico punto d'inversione della velocità radiale.

In questo caso l'eccentricità dell'orbita è data da : $e = \frac{V_P^2 \cdot R_P}{K^2} - 1$

Dall'espressione dell'orbita si rcava :

$$\cos\alpha = \frac{1}{e} \cdot \left(1 - \frac{R_n}{R} \right)$$

Per valori del numero quantico $n >> 1$, trascurando i punti della traiettoria prossimi al perielio, risulta : $\frac{R_n}{R} << 1$

e quindi, con buona approssimazione, si può scrivere : $\cos\alpha \simeq \frac{1}{e}$

Dalla figura risulta infatti che con $R_n << R$ si ottiene $\alpha \simeq \alpha'$.

Le curve reali che abbiamo ricavato per il sistema Solare, riportate nelle pagine **254e** e **254f** , dimostrano che in questo caso questa condizione viene ben verificata già con $n = 10$.

In ogni caso è certamente verificata sugli asintoti dell'iperbole :

$$\lim_{R \to \infty} \cos\alpha = \lim_{R \to \infty} \frac{1}{e} \cdot \left(1 - \frac{R_n}{R} \right) = \frac{1}{e}$$

Per tutte le orbite con $n >> 1$, giunti a quella parabolica, con perielio dato da

259e

$R_p = \dfrac{R_n}{2}$, con aggiunta di energia e conseguente spostamento su orbite iperboliche **il perielio non subisce spostamenti** apprezzabili, conservando praticamente inalterato il valore $\dfrac{R_n}{2}$, come dimostrano le curve reali del sistema Solare, in cui questa condizione è verificata bene già per $n = 3 \div 4$ e in maniera accettabile anche per $n = 1$.

In definitiva, per le orbite iperboliche, in prossimità degli asintoti, si ha :

$$\cos\alpha \simeq \frac{1}{e} = \frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_P}{K^2} - 1} = \frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1}$$

ricordando ora che : $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}}$

sostituendo, si ottiene :

$$tg^2\alpha = \left(\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1 \right)^2 - 1$$

Questa relazione fornisce l'inclinazione dell'asintoto di qualsiasi orbita iperbolica ed è "indipendente dal valore della massa", **quindi si applica anche per** $m \to 0$ **.**

Nel caso limite in cui la velocità V_P risulta esattamente uguale alla velocità di fuga $V_f = \sqrt{2} \cdot V_{eqP}$, sostituendo $V_{eqP}^2 \cdot R_P = K^2$, **si ottiene il valore atteso per l'orbita parabolica** $tg\alpha = 0$, **dunque** $\alpha = 0$.

Con riferimento all'orbita rappresentata in figura, la stessa relazione si può ricavare anche direttamente osservando che il tratto rettilineo della traiettoria

259f

coincide con l'asintoto, dato da : $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$

Per l'iperbole l'eccentricità vale : $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

Per le orbite ellittiche si ha invece : $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

Si ha quindi : $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{e^2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1\right)^2 - 1}$

Questa relazione fornisce la pendenza di un asintoto.

ricordando che : $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

La deviazione di un asintoto rispetto alla verticale risulta :

$$\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1\right)^2 - 1}}$$

Essendo i due asintoti simmetrici rispetto all'asse x , la deviazione dalla sua traiettoria, che una massa m subisce quando **entra in uno spazio rotante** K^2 , alla distanza R_n dal centro, raggiungendo una velocità V_P al perielio, sarà : $\delta = 2 \cdot \beta$ e quindi :

$$\delta = 2 \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1\right)^2 - 1}}$$

259g

La relazione non dipende dalla massa in moto e quindi è applicabile a tutta la materia, **qualunque sia il suo livello di aggregazione**, **anche alla luce con** $m \to 0$.

Se consideriamo $V_p^2 >> V_{fP}^2$ risulta : $$\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} >> 1$$

la deviazione β risulta molto piccola, per cui possiamo scrivere : $tg\beta \simeq \beta$

e quindi : $$\beta \simeq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K^2} - 1\right)^2 - 1}} \simeq \frac{2 \cdot K^2}{V_P^2 \cdot R_n}$$

e in definitiva, in questo caso, **il valore della deviazione** δ **dalla direzione di immissione della massa nello spazio rotante sarà** :

$$\delta = 2 \cdot \beta = \frac{4 \cdot K^2}{V_P^2 \cdot R_n}$$

espressa in secondi d'arco, sara :

$$\delta = 2 \cdot \beta = \frac{4 \cdot K^2}{V_P^2 \cdot R_n} \cdot \left(\frac{360}{2 \cdot \pi} \cdot 3600\right)$$

257

Si noti l'assoluta indipendenza dal valore della sua massa inerziale.

Del resto, è stato più volte ricordato, che le traiettorie percorse sono sempre indipendenti dalle masse, per cui possiamo applicare le relazioni, che sono state ricavate, anche ad una massa $m \to 0$, ossia ad una perturbazione dello spazio rotante come quella associata al fotone.

Consideriamo, per esempio, la deviazione subita da un fotone quando passa in prossimità della superficie del Sole. Si ha :

259h

$$V_p = C_l = 299792458 \ \frac{m}{sec}$$

$$R_{eqn} = r_s = 6,96 \cdot 10^8 \ m$$

$$K_s^2 = 132,725 \cdot 10^{18} \frac{m^3}{sec^2}$$

eseguendo i calcoli, si ricava :

$$\delta = 2 \cdot \beta = \frac{4 \cdot K_s^2}{C_l^2 \cdot r_s} \cdot \left(\frac{360}{2 \cdot \pi} \cdot 3600 \right) = 1,7506 ''$$

in perfetto accordo con il valore fornito dall'osservazione astronomica, senza alcun ricorso alla teoria della relatività.

La deviazione che viene imposta ad un fotone quando passa in prossimità di un elettrone, sfiorando la sua sfera planetaria, con i valori :

$$V_p = C_l = 299792458 \ \frac{m}{sec}$$

$$R_{eqn} = r_{pe} = 28,81989243 \cdot 10^{-15} \ m$$

$$K_s^2 = K_e^2 = 0,137931824 \frac{m^3}{sec^2}$$

risulta :

$$\delta = 43,93552644 ''$$

Molto più elevata di quella prodotta dal Sole, anche se lo spazio rotante dello elettrone è infinitamente minore di quello generato dal Sole.

Analogamente possiamo calcolare la deviazione che subisce un elettrone se viene lanciato in prossimità della sfera planetaria di un protone, per esempio alla velocità di $100000 \ \frac{k_m}{sec}$. Abbiamo, in questo caso :

$$V_p = 100000000 \ \frac{m}{sec}$$

259i

$$R_n = R_{11e} = 5,29177249 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

$$K_s^2 = K_p^2 = 253,2638995 \frac{\text{m}^3}{\text{sec}^2}$$

risulta : $$\delta = 394,872345\ ''$$

Naturalmente è possibile risolvere il problema inverso:
assegnato il valore della deviazione δ oppure β desiderata, si deve calcolare la velocità con la quale **il proiettile deve interagire con lo spazio rotante**, che deve genera la deviazione.

Supponiamo, per esempio di voler utilizzare la Luna per deviare la traiettoria di una sonda di un angolo $\beta = 15°$.

In radianti la deviazione richiesta vale : $\beta = 15° \cdot \dfrac{2 \cdot \pi\ \text{rad}}{360°} = 0.2618\ \text{rad}$

Le caratteristiche della Luna, che interessano per il nostro calcolo con valore **solo esplicativo** sono:

$$r_L = 1738\ K_m$$

$$m_L = 7.347673 \cdot 10^{22}\ K_g$$

$$K_L^2 = 4902.8 \frac{K_m^3}{\text{sec}^2}$$

Essendo il valore della deviazione richiesta relativamente elevata, utilizziamo la relazione non approssimata :

$$\text{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K_L^2} - 1\right)^2 - 1}}$$

dalla quale, con $R_n = 2 \cdot r_L$, ricordando che : $\dfrac{\text{tg}\beta}{\sqrt{1 + \text{tg}^2\beta}} = \text{sen}\beta$

si ricava il valore della velocità necessaria in prossimità della superficie, per produrre la deviazione β :

259I

$$V_P = \left[\frac{2 \cdot K_L^2}{2 \cdot r_L} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{sen}\beta} + 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}} = 3.70408 \frac{K_m}{sec}$$

per produrre invece una deviazione uguale a $\frac{\pi}{2}$ risulta :

$$V_P = \left[\frac{2 \cdot K_L^2}{2 \cdot r_L} \cdot (1 + 1) \right]^{\frac{1}{2}} = 2.3753 \frac{K_m}{sec}$$

che coincide con la velocità di fuga dalla superficie, in quanto in questo caso l'orbita del proiettile diventa una parabola.

259m