–**Teoria dell'urto tra particelle elementari**, **effetto Compton e redshift gravitazionale** (**spostamento verso il rosso**)

Nell'esperienza quotidiana si chiama urto un processo simile a quello che si verifica quando si scontrano due palle da biliardo o due automobili.
In fisica **il termine urto** è usato con un significato più ampio, comprendendo qualsiasi tipo d'interazione tra particelle di durata Δt molto breve rispetto al tempo di osservazione delle caratteristiche di moto delle masse interagenti.

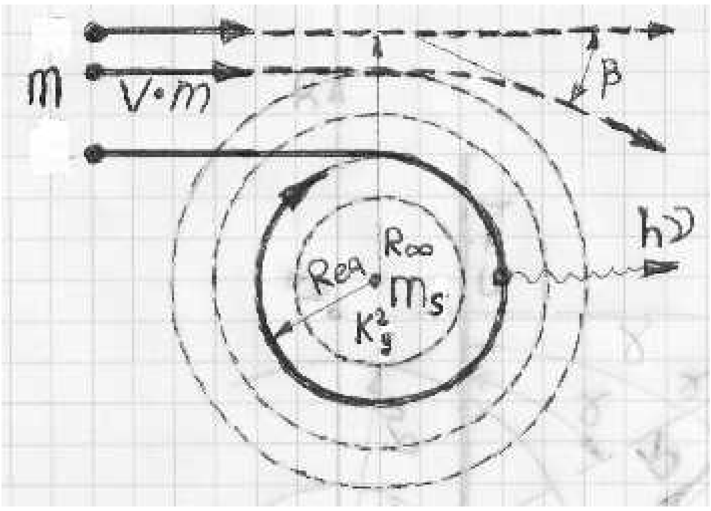
Normalmente il processo viene studiato considerando il regime del sistema prima e dopo l'interazione e imponendo, senza altre considerazioni, i principi di conservazione dell'energia e della quantità di moto.

La teoria che abbiamo elaborato ci dice però che **qualsiasi interazione tra due masse si realizza sempre attraverso i loro spazi rotanti**.

Quello che noi vediamo è il risultato dell'azione che il sistema esercita per conservare l'equilibrio, **se esso è stabile**, **oppure**, **più in generale**, **per raggiungere**, **dopo l'urto**, **un equilibrio associato a una condizione di maggiore stabilità**.

In parole molto semplici, possiamo dire che l'azione che le due masse, **nelle condizioni di moto considerate**, esercitano reciprocamente è sempre tale da favorire la formazione di un sistema più stabile di quello iniziale.

Con riferimento alla figura, supponiamo di avere una massa m alla distanza R_∞ dal centro dello spazio rotante K_s^2 generato dalla massa solare centrale m_s. Per semplificare l'esposizione, supponiamo che sia $m << m_s$.



In queste condizioni, qualunque sia la velocità V della massa periferica, essa è libera e non interagisce in maniera apprezzabile con lo spazio rotante.
Si ottiene così una deviazione $\beta = 0$ e la massa che continua, indisturbata, la sua corsa.

Se ora lanciamo la massa m ad una distanza dal centro sempre minore, man mano che si riduce il raggio R, **aumenta l'interazione** che tende a portare il sistema in una condizione di equilibrio più stabile.

Si possono presentare, a questo punto, due casi :

– La massa m può trovare equilibrio stabile su un'orbita dello spazio rotante generato da m_s, ossia le due masse sono in grado di **formare un sistema legato stabile**, come per esempio accade con un protone ed un elettrone, e in questo caso si manifesta una forza che tende a ridurre la distanza R tra le due masse (forza attrattiva)

– La massa m non è in grado di formare con m_s un sistema legato stabile e e quindi si manifesta una forza repulsiva, che spinge le masse verso l'unico punto di equilibrio possibile con $R \to \infty$. E' questo, per esempio, il caso di due protoni oppure due elettroni.

Se prendiamo in considerazione il primo caso, si ottiene così una deviazione sempre maggiore fino al valore massimo :

$\beta_{max} = \dfrac{\pi}{2}$, corrispondente ad un'orbita parabolica con $e = 1$.

Nel paragrafo P. 29.2 abbiamo infatti ricavato per la deviazione la relazione :

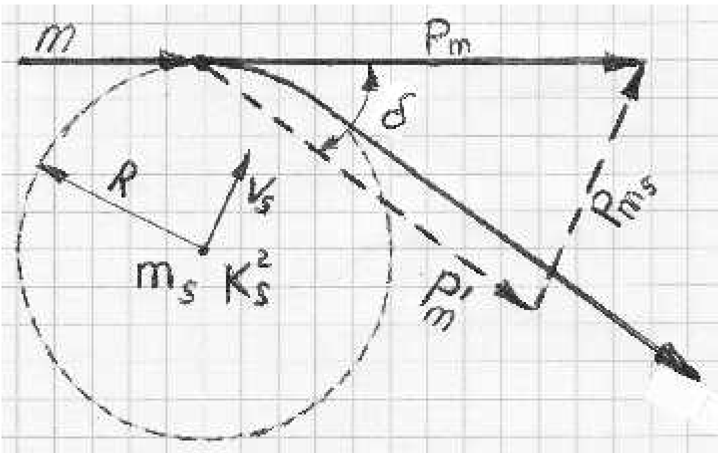
$$\text{sen}\beta = \frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_p}{K_s^2} - 1}$$

che, per $V_P = \sqrt{2} \cdot V_{eqP}$ porta a :

$$V_P^2 \cdot R_p = 2 \cdot V_{eqP}^2 \cdot R_p = 2 \cdot K_s^2 \text{ e quindi } \text{sen}\beta = 1 \to \beta = \frac{\pi}{2}$$

Un’ulteriore riduzione del raggio, anche minima, comporterebbe il passaggio della massa **in moto su un’orbita ellittica**.

E’ chiaro che nel sistema composto dallo spazio rotante e la massa in moto, supposto isolato, considerandolo prima e dopo l’interazione, devono essere verificati i principi di conservazione.



Imponendo la conservazione dell’energia e della quantità di moto, applicando il teorema di Carnot al triangolo degli impulsi, si può scrivere :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_m^2 + P_{m^*}^2 - 2 \cdot P_m \cdot P_m \cdot \cos\delta = P_{m_s}^2 \\ \\ E_m - E_{m^*} = E_{m_s} \end{array} \right\}$$

sostituendo $P = m \cdot V \;\; ; \;\; E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2$ e ponendo : $r = \frac{V}{V^*}$

con qualche semplice passaggio, si ricava l’equazione :

$$r \cdot \left(1 - \frac{m}{m_s} \right) - \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{m}{m_s} \right) + 2 \cdot \frac{m}{m_s} \cdot \cos\delta = 0$$

dalla quale vediamo che se $\frac{m}{m_s} << 1$, per qualsiasi deviazione δ **risulta sempre $r = 1$ e non si verifica quindi alcuna variazione apprezzabile della velocità**.

Si noti **l'assoluta indipendenza** della deviazione β dalla massa interagente con con lo spazio rotante e quindi l' espressione di β si applica sia al fotone che agli ammassi galattici.

Un asteroide che passa, per esempio, alla velocità : $V = 3\ \frac{K_m}{sec}$

ad una distanza dal centro della Terra : $R = 10^6\ K_m$

subisce una deviazione :

$$\delta = 2 \cdot \text{arcsen}\frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K_s^2} - 1} =$$

$$= 2 \cdot \text{arcsen}\frac{1}{\dfrac{\left(3000\frac{m}{sec}\right)^2 \cdot 10^9 m}{2 \cdot 398754 \cdot 10^9 \frac{m^3}{sec^2}} - 1} = 0.1947627\,\text{rad} = 11{,}159°$$

Se invece di un asteroide consideriamo per esempio un fotone che passa in prossimità del confine di un atomo di uranio ($Z = 92$), con $R_n = 3 \cdot 10^{-10} m$ lo spazio rotante vale :

$$K_z^2(92) = 92 \cdot K_p^2 = 92 \cdot 253.2638995\frac{m^3}{sec^2} = 23300.27875\frac{m^3}{sec^2}$$

essendo $m = 0$, la velocità del fotone rimane invariata su tutta la traiettoria e vale : $C_l = 299792458\ \frac{m}{sec}$

La deviazione della traiettoria risulta :

$$\delta = 2 \cdot \text{arcsen}\frac{1}{\dfrac{\left(299792458\frac{m}{sec}\right)^2 \cdot 3 \cdot 10^{-10} m}{2 \cdot 23300.27875\frac{m^3}{sec^2}} - 1} = 3.463 \cdot 10^{-3}\text{rad}$$

in secondi d'arco : $\delta = 3.463 \cdot 10^{-3}\text{rad} \cdot \left(\dfrac{360}{2 \cdot \pi} \cdot 3600\right) = 714.3''$

263

Se con lo stesso atomo, nelle stesse condizioni, interagisce un elettrone con una velocità di $10^8 \frac{m}{sec}$, si ottiene una deviazione pari a $1,8082°$.

E' da notare che, quando $V_P^2 \cdot R_n >> 2 \cdot K^2$, si ha $\text{sen}\,\beta \simeq \beta$ e quindi in questo caso, **il valore della deviazione** δ **dalla direzione di immissione della massa nello spazio rotante diveta** :

$$\delta = 2 \cdot \beta \simeq \frac{4 \cdot K^2}{V_P^2 \cdot R_n}$$

A quasto punto ricordiamo che qualsiasi massa, anche $m \to 0$, spostandosi in uno spazio rotante deve soddisfare l'equazione fondamentale :

$$V^2 \cdot R = K^2$$

che si può anche scrivere : $V^2 = \dfrac{K^2}{R}$ e differenziando :

$$d\left(V^2\right) = d\left(\frac{K^2}{R}\right) = K^2 \cdot d\left(\frac{1}{R}\right) = -K^2 \cdot \frac{dR}{R^2}$$

si ottiene quindi: $$d\left(V^2\right) = -\frac{K^2}{R} \cdot \frac{dR}{R}$$

Ricordiamo ora che in uno spazio rotante la velocità orbitale e quella radiale (velocità di fuga dall'orbita) stanno nel rapporto $V_R = \sqrt{2} \cdot V$; sostituendo

si ha quindi : $$d\left(\frac{V_R^2}{2}\right) = -\frac{K^2}{R} \cdot \frac{dR}{R}$$

moltiplicando per la massa in moto m e ricordando che $\dfrac{V_R^2}{2} \cdot m = E$

per una massa in moto, **in direzione radiale**, si può scrivere :

264

$$\left(\frac{dE}{m}\right) = -\frac{K^2}{R} \cdot \frac{dR}{R}$$

Si noti che questa relazione **è una caratteristica di tutti gli spazi rotanti** e non è legata alla massa della particella in moto, in quanto il differenziale dE è proporzionale alla massa m.

Se consideriamo ora il fotone che si allontana dal centro dello spazio rotante solare, ricordando che per il fotone l'energia di massa : $E = m \cdot C_l^2$

è tutta trasformata in radiazione elettromagnetica : $E = h \cdot \nu$

sostituendo nella relazione, si ottiene :

$$\frac{d(h \cdot \nu) \cdot C_l^2}{(h \cdot \nu)} = -\frac{K^2}{R} \cdot \frac{dR}{R}$$

semplificando :

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{K^2}{C_l^2 \cdot R} \cdot \frac{dR}{R}$$

ricordando che $\lambda \cdot \nu = C_l$, differenziando si ha : $\dfrac{d\nu}{\nu} = -\dfrac{d\lambda}{\lambda}$

e quindi anche : $$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{K^2}{C_l^2 \cdot R} \cdot \frac{dR}{R}$$

integrando tra i limiti $R = \infty$ e $R = r$ si ottiene :

$$\ln\left(\frac{\nu(r)}{\nu_\infty}\right) = \frac{K_s^2}{C_l^2 \cdot r}$$

dove, al secondo membro abbiamo l'energia potenziale per unità di massa.

265

Ricordando che $\dfrac{K_s^2}{C_l^2} = r_{1s} =$ raggio dell'orbita minima raggiungibile

sostituendo, si ha : $$\nu(r) = \nu_\infty \cdot e^{\frac{r_{1s}}{r}}$$

posto : $\Delta\nu = \nu_\infty - \nu(r)$ si può anche scrivere :

$$\Delta\nu(r) = \nu_\infty \cdot \left(1 - e^{\frac{r_{1s}}{r}} \right)$$

E' da notare che generalmente si ha $r >> r_{1s}$ e quindi si sviluppa in serie di Taylor l'esponenziale, **fermandosi al secondo termine**, per cui si utilizza la relazione approssimata :

$$\Delta\nu(r) = -\,\nu_\infty \cdot \frac{r_{1s}}{r}$$

Se, per esempio, osserviamo l'orbita di un pianeta del Sistema Solare, con perielio R_P ed afelio R_A, fissato il fotone da utilizzare per la misurazione, tra i due punti verrà osservata una differenza di frequenza complessiva :

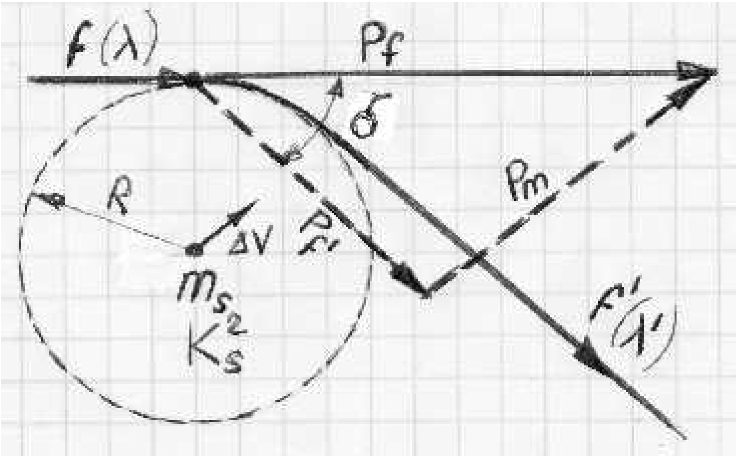
$$\Delta\nu(A) - \Delta\nu(P) = -\,\nu_\infty \cdot \left(\frac{r_{1s}}{R_A} - \frac{r_{1s}}{R_P} \right)$$

che si traduce in una errata valutazione delle distanze.

Il rapporto $\dfrac{r_{1s}}{r}$ viene generalmente definito **redshift gravitazionale** ed è è calcolabile senza ricorrere agli effetti relativistici.

La variazione della frequenza dovuta all'azione gravitazionale, che abbiamo calcolato, **è solo una componente del redshift totale**.
Si hanno infatti altre due componenti : la prima dovuta all'effetto Doppler e la seconda all'effetto Compton.

Si noti che, anche se non è stato espressamente dichiarato, lo spazio rotante K_s^2 è stato ritenuto vincolato a un punto fisso dello spazio, associato dunque a una massa inerziale infinitamente elevata.



Con riferimento alla figura, quando lo spazio rotante centrale K_s^2 è associato a una massa inerziale m_s di valore finito, priva di vincoli, la deviazione β del fotone (il discorso si applica comunque a qualsiasi massa) comporta una variazione dell'impulso dal valore P_f al valore P_{f^*} con la cessione della differenza P_m alla massa m_s **solidale con lo spazio rotante interagente**.

Dalla interazione la massa m esce con una variazione ΔV della velocità in direzione parallela all'impulso P_m .

Imponendo la conservazione dell'impulso e dell'energia al sistema, supposto isolato, se applichiamo il teorema di Carnot al triangolo degli impulsi, si può scrivere :

$$\left\{ \begin{array}{l} P_f^2 + P_{f^*}^2 - 2 \cdot P_f \cdot P_{f^*} \cdot \cos\delta = P_m^2 \\ \\ E_f - E_{f^*} = \Delta E_m \end{array} \right\}$$

266a

sostituendo le relazioni note per il fotone :

$$P = \frac{h \cdot \nu}{C_l} \quad ; \quad E = h \cdot \nu \quad ; \quad \lambda = \frac{C_l}{\nu} \quad ; \quad E = \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot V^2$$

si ottiene :

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{C_l^2} \cdot \left(\nu^{*2} + \nu^2 - 2 \cdot \nu \cdot \nu^* \cdot \cos\delta \right) = \left(m_s \cdot V \right)^2 \\ h \cdot \left(\nu^* - \nu \right) = \dfrac{1}{2} \cdot m_s \cdot V^2 \end{cases}$$

oppure :

$$\begin{cases} \dfrac{h^2}{C_l^2} \cdot \left(\dfrac{C_l^2}{\lambda^{*2}} + \dfrac{C_l^2}{\lambda^2} - \dfrac{2 \cdot C_l^2}{\lambda \cdot \lambda^*} \cdot \cos\delta \right) = \left(m_s \cdot V \right)^2 \\ h \cdot \left(\dfrac{C_l}{\lambda^*} - \dfrac{C_l}{\lambda} \right) = \dfrac{1}{2} \cdot m_s \cdot V^2 \end{cases}$$

eliminando V^2, si ottiene :

$$h \cdot \left(\frac{1}{\lambda^{*2}} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \cdot \lambda^*} \cdot \cos\delta \right) = 2 \cdot C_l \cdot m_s \cdot \left(\frac{1}{\lambda^*} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\frac{h}{2 \cdot C_l \cdot m_s} \cdot \left(\frac{1}{\lambda^{*2}} + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda \cdot \lambda^*} \cdot \cos\delta \right) = \left(\frac{1}{\lambda^*} - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda^*} + \frac{\lambda^*}{\lambda} - 2 \cdot \cos\delta \right) = \frac{2 \cdot C_l \cdot m_s}{h} \cdot (\lambda - \lambda^*)$$

essendo $\Delta\lambda = (\lambda - \lambda^*) << \lambda$, si ha : $\dfrac{\lambda}{\lambda^*} + \dfrac{\lambda^*}{\lambda} \simeq 2$

266b

e quindi, l'espressione che descrive l'effetto Compton, diventa :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{C_l \cdot m_s} \cdot \left(1 - \cos\delta\right)$$

ricordando che :

$$\delta = 2 \cdot \arcsen \frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K_s^2} - 1} \simeq \frac{4 \cdot K^2}{V_P^2 \cdot R_n}$$

con $V = C_l$, si può ancora scrivere :

$$\Delta\lambda = \frac{h}{C_l \cdot m_s} \cdot \left[1 - \cos 2 \arcsen \frac{2 \cdot K_s^2}{V_P^2 \cdot R_n - 2 \cdot K_s^2} \right]$$

Quando $V_P^2 \cdot R_n >> 2 \cdot K_s^2$ si ottengono piccole deviazioni e quindi :

$$\Delta\lambda \simeq \frac{h}{C_l \cdot m_s} \cdot \left[1 - \cos \frac{4 \cdot K_s^2}{V_P^2 \cdot R_n} \right]$$

Casi particolarmente interessanti sono quelli in cui lo spazio rotante centrale viene generato da un elettrone o da un protone. In questi casi, sostituendo i valori numerici, si ottiene :

$$\Delta\lambda = 2,42631 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot \left(1 - \cos\delta\right)$$

$$\Delta\lambda = 1,32214 \cdot 10^{-15} \text{ m} \cdot \left(1 - \cos\delta\right)$$

Se si sostituisce nelle relazioni l'espressione teorica di h , si ottiene :

$$\frac{h}{C_l \cdot m_s} = \frac{2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot V_{11e} \cdot m_e}{C_l \cdot m_s}$$

266c

con $m_s = m_e$ si ricava : $\frac{2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot V_{11e}}{C_l} = 2 \cdot \pi \cdot R_{11e} \cdot \frac{V_{11e}}{C_l}$

ricordando che : $\frac{C_l}{V_{11e}} = p_{ns} = 137,0359896$

si può scrivere :

$$\frac{h}{C_l \cdot m_e} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_{11e}}{p_{ns}^2} \cdot p_{ns} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{K_p^2}{C_l^2} \cdot p_{ns} = 2 \cdot \pi \cdot r_{1P} \cdot p_{ns}$$

analogamente, con $m_s = m_p$ si ricava :

$$\frac{h}{C_l \cdot m_p} = 2 \cdot \pi \cdot r_{1P} \cdot \frac{m_e}{m_p} \cdot p_{ns} = 2 \cdot \pi \cdot r_{1e} \cdot p_{ns}$$

dove r_{1P} indica l'orbita sulla quale la velocità di equilibrio è uguale a quella della luce C_l.

Le relazioni che abbiamo ricavato sono estremamente interessanti, in quanto ci consentono di calcolare **l'angolo di diffusione di qualsiasi particella o massa ordinaria lanciata in qualsiasi spazio rotante**, **con una velocità maggiore di quella di fuga dal punto in cui viene immessa**.

Inoltre esse mettono in evidenza che l'**effetto Compton** e la deviazione della luce, che si osserva quando essa passa entro il raggio d'azione di un campo gravitazionale, seguono lo stesso meccanismo e le stesse leggi che vengono seguite dagli agregati ordinari.

Per chiarire questo aspetto, consideriamo un elettrone accelerato che viene sparato contro un protone alla distanza dal centro $R_n = 1.5 \cdot 10^{-10} m$, con la velocità $V_p = 5 \cdot 10^6 \frac{m}{sec}$.

Lo spazio rotante vale : $K_p^2 = 253.2638995 \frac{m^3}{sec^2}$

la deviazione risulta :

266d

$$\delta = 2 \cdot \text{arcsen} \frac{1}{\dfrac{V_P^2 \cdot R_n}{2 \cdot K_z^2} - 1} = 0.31362 \,\text{rad} = 17.969°$$

noto il rapporto tra le masse : $$\frac{m_e}{m_p} = 544.616 \cdot 10^{-6}$$

ricaviamo la variazione della velocità per effetto Compton con la relazione :

$$r \cdot \left(1 - \frac{m}{m_s}\right) - \frac{1}{r} \cdot \left(1 + \frac{m}{m_s}\right) + 2 \cdot \frac{m}{m_s} \cdot \cos\delta = 0$$

sostituendo i valori numerici, si ottiene $r = \dfrac{V}{V*} = 0.6085$.

utilizzando la lunghezza d'onda associata all'elettrone, si ha :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = -\frac{\Delta V}{V} = \frac{1 - 0.6085}{1} = 0.3915$$

$$\Delta\lambda = \lambda \cdot 0.3915 = \frac{h}{m_e \cdot V_p} \cdot 0.3915 = 5.69546 \cdot 10^{-11} \,\text{m}$$

266e