Himalia	**11480**	**0,15798**	**11193**
Pasihiphae	**23500**	**0,378**	**20142**
Ananke	**21200**	**0,1687**	**20596**
Lysithea	**11720**	**0,107**	**11586**
Leda	**11094**	**0,14762**	**10852**

6 – Fascia degli asteroidi : Abbiamo visto che tale fascia occupa la regione dello spazio rotante :

$$580,9 \cdot 10^6 \text{ K}_m \quad \div \quad 255,8 \cdot 10^6 \text{ K}_m$$

coincidente con lo spazio in cui l'azione attrattiva dei pianeti confinanti, Marte e Giove si può ritenere trascurabile rispetto a quella solare.

In tale spazio si hanno tre orbite stabili in corrispondenza di :

$$R_{n1} = \mathbf{461,3 \cdot 10^6} \text{ K}_m \;\; ; \;\; R_{n2} = \mathbf{346 \cdot 10^6} \text{ K}_m \;\; ; \; R_{n3} = \mathbf{259,5 \cdot 10^6} \text{ K}_m$$

Normalmente, per brevità, alla fascia viene assegnato il raggio medio :

$$R_A = \frac{(580,9 + 255,8) \cdot 10^6 \text{ K}_m}{2} \simeq \mathbf{418,4 \cdot 10^6} \text{ K}_m$$

Un'altra fascia simile, come sappiamo, esiste ai confini del Sistema Solare con estensione approssimativa da $\mathbf{7381 \cdot 10^6}$ K_m a $\mathbf{14762 \cdot 10^6}$ K_m.

Calcoliamo il valore minimo che deve avere il raggio degli asteroidi per poter restare stabilmente in orbita all'interno di queste fasce senza perdere massa verso il Sole.

Per un calcolo indicativo, assumiamo una densità media $\delta = 2 \frac{g}{cm^3}$

a) Nella fascia di Kuiper si hanno i valori estremi :

$$r_1 > \frac{\delta_S}{\delta} \cdot \frac{r_S^3}{R_1^2} = \frac{1{,}41}{2} \cdot \frac{(696000\ K_m)^3}{(14762 \cdot 10^6\ K_m)^2} = \mathbf{1{,}09}\ m$$

$$r_2 > \frac{1{,}41}{2} \cdot \frac{(696000\ K_m)^3}{(7381 \cdot 10^6\ K_m)^2} = \mathbf{4{,}36}\ m$$

b) Per la fascia dei pianetini si ricava :

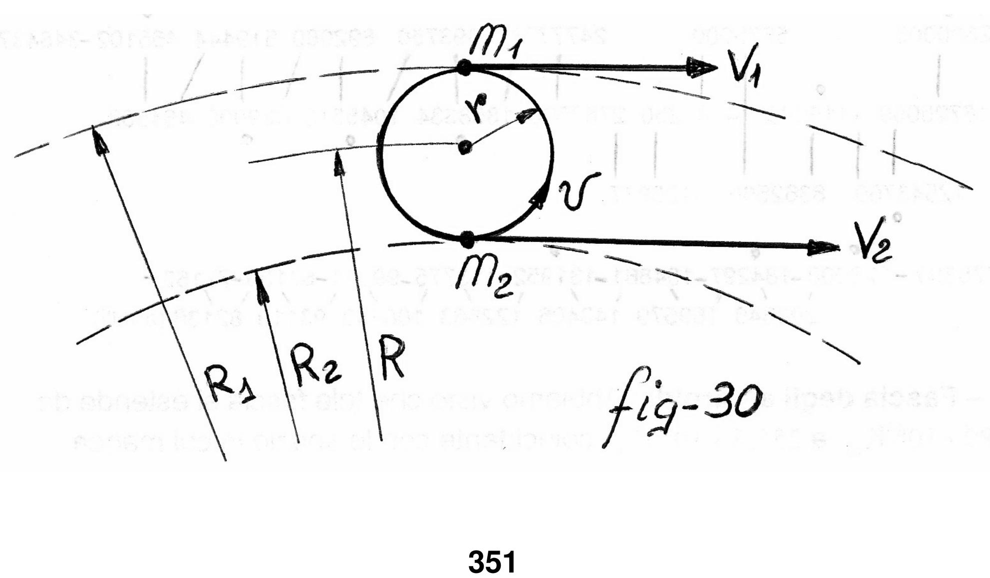
$$r_1 > \frac{1{,}41}{2} \cdot \frac{(696000\ K_m)^3}{(580 \cdot 10^6\ K_m)^2} = \mathbf{706}\ m$$

$$r_2 > \mathbf{3632}\ m$$

In entrambi i casi, **i corpi aventi dimensioni minori sono più stabili**, **e quindi sono anche più numerosi**, **nella parte esterna della fascia**.

I valori ottenuti mettono in evidenza l'esistenza di un rapporto **1** / **1000** tra le dimensioni minime delle particelle che mediamente orbitano nelle due fasce.

Questo significa che nella fascia di Kuiper si avranno mediamente particelle molto più piccole di quelle presenti in quella degli asteroidi.



Con riferimento alla figura 30, consideriamo due masse m_1 ed m_2 in moto inizialmente su due orbite indipendenti all'interno della fascia.

Per semplicità di esposizione, assumiamo inoltre $m_1 = m_2 = m$.

Se il loro raggio d'azione è maggiore della distanza tra le masse, ovvero, si verifica $R_{maxa} > 2\,r$, la forza d'interazione risulta attrattiva e dunque si ha un graduale accostamento pur restando le due orbite distinte.

Il momento angolare del sistema iniziale, con le due masse indipendenti, vale :

$$M_i = m_1\, V_1\, R_1 + m_2\, V_2\, R_2 = m \cdot \left(V_1\, R_1 + V_2\, R_2\right)$$

le velocità relative, in prima approssimazione, risultano :

$$V_1 = V_p - \left(\frac{K_S^2}{4 \cdot R_p^3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r$$

$$V_2 = V_p + \left(\frac{K_S^2}{4 \cdot R_p^3}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot r$$

con qualche semplice passaggio, si ricava :

$$M_i = 2 \cdot m \cdot V_p \cdot R_p \cdot \left(\frac{1}{1 - \dfrac{r^2}{4 \cdot R_p^2}}\right)$$

Secondo tale relazione, quando le due masse si accostano per formare un sistema doppio, la diminuzione di r comporta una diminuzione del momento angolare M_i.

Questo però non è possibile, in quanto, se non abbiamo applicato delle forze esterne, M_i deve restare invariato.

Per questa ragione, man mano che si avvicinano, le due masse iniziano a ruotare nello stesso verso dello spazio rotante centrale K_s^2 , con una velocità crescente, in modo da acquistare un momento angolare rispetto al comune centro di rotazione, oltre a quello che deriva dal loro moto di rivoluzione.

L'accostamento e l'aumento della velocità di rotazione v_p cessano quando viene raggiunta la condizione di equilibrio :

$$\frac{v_p^2}{r_f} - \frac{K_p^2}{r_f^2} = 0 \quad \text{che equivale a :} \quad v_p^2 \cdot r_f = K_p^2 \,.$$

A questo punto, il momento angolare delle due particelle legate, vale :

$$M_f = 2 \cdot m\, V_p R_p + 2 \cdot m\, v_p\, r_f$$

Il secondo termine dipende unicamente dall'equilibrio tra le due masse e non è legato ai principi di conservazione.

Per poter avere $M_f = M_i$, il sistema unico, formato dalle due masse rotanti, si deve spostare verso il centro dello spazio rotante centrale, riducendo R_p

e quindi la componente del momento angolare dovuta al moto di rivoluzione.

Nella fascia si genera dunque un lento scorrimento verso il centro dello spazio rotante, che continua con l'aumento del livello di aggregazione.

Oltre al valore minimo r_{min}, esiste dunque un limite massimo oltre il quale gli aggregati escono dalla fascia per spostarsi su orbite stabili più interne.

Come abbiamo visto, la forza di legame richiesta per avere l'equilibrio di un sistema doppio che si forma nella fascia di Kuiper, **avvicinandosi al Sole**

aumenta e quindi il legame diventa meno stabile.

Esiste un valore del raggio dell'orbita in corrispondenza del quale la massa satellite (di minori dimensioni) si libera nello spazio rotante solare e diventa, a sua volta, un pianeta oppure un satellite di qualche pianeta che si trova su un'orbita più bassa.

Dalla relazione :

$$r_{min} = \frac{\delta_S}{\delta_P} \cdot \frac{r_S^3}{R_P^2}$$

vediamo che le masse più piccole possono occupare stabilmente solo orbite di raggio R_P elevato, mentre quelle di maggiori dimensioni trovano equilibrio anche su bassi valori di R_P.

Se teniamo conto dei risultati numerici ottenuti e del fatto che **nel Sistema Solare le uniche orbite poco influenzate dai pianeti vicini sono proprio quelle corrispondenti alla fascia dei pianetini**, l'origine della fascia può avere due giustificazioni.

Se pensiamo che tutto il Sistema Solare sia stato e venga ancora alimentato dalle masse che si aggregano nella fascia di Kuiper, secondo l'ipotesi della esplosione della stella, diventa praticamente impossibile pensare che grandi masse **come la Terra**, **Venere**, **Mercurio e Marte** abbiano potuto superare ben tre orbite stabili, senza fermarsi, per portarsi nella posizione attuale, su orbite più interne, aventi la stessa stabilità.

Dobbiamo dunque pensare che la fascia degli asteroidi si sia formata contemporaneamente agli altri pianeti.

Si tratta quindi di stabilire solo se essa può aver avuto origine con la attuale configurazione oppure se quella che osserviamo rappresenta l'evoluzione di una diversa forma iniziale.

Secondo la teoria che abbiamo esposto, esiste una **remotissima** possibilità che la fascia si sia formata con l'accumulo di tutti i detriti che i grandi pianeti gassosi catturano nella parte più esterna dell'orbita, dove l'azione del Sole è concorde con quella del pianeta, e li rilasciano nella parte interna, più vicina al Sole, dove la sua azione può essere prevalente.

In definitiva, secondo questa ipotesi, nella zona dei pianetini si accumula tutto ciò che viene " **traghettano verso l'interno** " e riesce a sfuggire all'azione gravitazionale dei grandi pianeti.

.

La seconda possibilità, certamente la più probabile, è che la fascia in origine fosse occupata da un solo pianeta, sull'orbita centrale con valore del raggio minimo $R_{n2} = \mathbf{346 \cdot 10^6}$ K_m , avente una massa capace di " aggregare tutti gli altri detriti eventualmente presenti.

Esiste infine la possibilità che la fascia, inizialmente, sia stata occupata da tre pianeti, di dimensioni più ridotte, ciascuno su un'orbita stabile.

Dal punto di vista dell'analisi, quest'ultimo caso non si presenta comunque diverso da quello precedente.

Il calcolo dei valori delle masse necessarie per avere la fascia " pulita " è già stato fatto e non viene qui ripetuto.

Ricordiamo solo che la larghezza della fascia è tale da richiedere due masse molto elevate, ciascuna di $3884 \cdot 10^{24}$ K_g , maggiore di quella di Giove, oppure una sola di valore doppio.

La presenza attuale di tutti i detriti e l'analogia con la fascia di Kuiper, fanno pensare, senza dubbio, ad una esplosione.

Si tratta di capire che cosa può essere esploso e per quale ragione ciò può essersi verificato.

Se pensiamo ad una sola massa, diventa difficile vedere le cause che per le quali si può produrre una esplosione.

E', **certamente**, **molto più probabile che ciò possa verificarsi in seguito allo scontro tra due grandi masse**.

Bisogna infatti considerare che, per avere una esplosione attraverso un urto, che produca solo detriti di piccole dimensioni, è necessario che entrambe le masse vengano disgregate.

Dunque, nessuna di esse deve essere in grado di assorbire la perturbazione indotta dall'urto dell'altra.

Questo vuol dire che il valore delle due masse non deve essere molto diverso in modo che durante l'urto entrambe assorbano l'energia necessaria per la loro riduzione in frantumi.

Nel nostro caso pensiamo dunque allo scontro tra due masse, praticamente uguali, di valore pari a $\mathbf{3884 \cdot 10^{24}}$ K_g.

Subito dopo l'esplosione della stella che le ha generate, le due masse hanno ricevuto, approssimativamente, lo stesso impulso e quindi si muovono verso il Sole con una certa velocità comune V_{0S} ad una distanza iniziale tra loro che indichiamo con R_0 ed una velocità relativa V_0 che, per quanto abbiamo visto dovrà essere $V_0 \to 0$.

Durante il moto le due masse sono soggette alla reciproca azione, per cui la loro distanza R diminuisce.

Dovendo, durante l'accostamento, verificare la conservazione del momento angolare, con ovvio significato dei simboli, si ha :

$$m \cdot V_0 \cdot R_0 = m \cdot V \cdot R$$

dalla quale si ricava la velocità di rotazione di una massa rispetto all'altra :

$$V = V_0 \cdot \frac{R_0}{R}$$

Per poter entrare in orbita stabile e formare un sistema doppio, la velocità V deve uguagliare quella di equilibrio data da :

$$V_{eq} = \left(\frac{K_p^2}{R} \right)^{\frac{1}{2}}$$

si ricava quindi il valore del raggio dell'orbita sulla quale sarà possibile avere equilibrio :

$$R_{eq} = \frac{V_0^2 \cdot R_0^2}{K_p^2}$$

356

Essendo il valore R_0 **limitato dal punto neutro e** K_p^2 **di valore molto elevato**, **risulta** $R_{eq} \rightarrow 0.$

Le due masse non **riescono dunque a formare un sistema doppio** e si precipitano una contro l'altra, praticamente come se fossero in caduta libera, provocando la disintegrazione totale.

Se ipotizziamo che le due masse abbiano inizialmente occupato, nella fascia dei pianetini, le due orbite centrali associate ai raggi :

$$R_{n1} = 461,3 \cdot 10^6 \ K_m \quad ; \quad R_{n2} = 346,0 \cdot 10^6 \ K_m$$

possiamo valutare l'energia messa in gioco nell'impatto, che risulta uguale al valore dell'energia potenziale di una massa rispetto all'altra nella posizione di partenza :

$$E = E_C = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 = m \cdot \frac{K_p^2}{\left(R_{n1} - R_{n2}\right)}$$

eseguendo i calcoli si ottiene :

$$E = 8,7302 \cdot 10^{33} \ j$$

Per confronto, ricordiamo che l'energia cinetica della Terra in orbita vale :

$$E_T = 2,6670 \cdot 10^{33} \ j$$

L'impatto che, secondo la nostra ipotesi, si sarebbe prodotto risulta uguale a quello che produrrebbe lo scontro tra due corpi celesti di massa doppia della Terra in moto alla velocità di $29,876 \ \frac{K_m}{sec}$.

Si tratta di un valore di energia veramente impressionante e dunque si potrà ritenere verosimile che in queste condizioni si produca una polverizzazione delle due masse con generazione di un gran numero di asteroidi e comete.

L'osservazione astronomica rivela per quasi tutti i pianetini aventi dimensioni apprezzabili un periodo di rotazione diverso da quello di rivoluzione e questo può essere facilmente giustificato pensando che la grande densità di detriti presenti nella fascia al momento dell'esplosione abbia facilitato la "**cattura**" di piccoli satelliti, secondo i meccanismi che abbiamo descritto.

Degli asteroidi di maggiori dimensioni si conosce il periodo di rotazione e quindi, ipotizzando che siano sistemi doppi (dunque con rotazione sincrona), possiamo ricavare le caratteristiche di ciascun sistema.

Cerere – sono noti i valori :

$$r_c = 457 \ K_m \ ; \ R_c = 413{,}9 \cdot 10^6 \ K_m \ ; \ T_p = 9{,}07 \ h \ ; \ m_c = 9{,}47 \cdot 10^{20} \ K_g$$

con questi dati si ricavano i valori di prima approssimazione :

$$K_c^{*2} = 63{,}176 \ \frac{K_m^3}{sec^2} \ ; \ R_{NCS}^{*} = 9030{,}8 \ K_m$$

Il raggio dell' orbita del satellite sarà :

$$d^* = \left[\frac{T_P^2 \cdot K_C^{*2}}{4 \cdot \pi^2} \right]^{\frac{1}{3}} = 1194{,}9 \ K_m$$

Per avere un sistema doppio, dovrà essere :

$$R_{NCS} = d \cdot n_c^2 \ ; \ R_{NXS} = d \cdot n_x^2$$

dalla prima si ricava :

$$n_c^2 = \frac{R_{NCS}}{d} \simeq \frac{R_{NCS}^{*}}{d^*} = \frac{9030{,}8}{1194{,}9} = 7{,}558 \simeq \left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 = 8$$

se teniamo conto che nessun satellite è stato osservato in orbita nello spazio rotante di Cerere, possiamo pensare che esso debba avere le dimensioni minime, corrispondenti a $n_x^2 = 1$.

si ottiene quindi :

$$R_{NXS}^{*} = d^* \ ; \ R_{NCS}^{**} = d^* \cdot n_c^2 = 9559{,}2 \ K_m$$

Si ricavano dunque le masse :

358

$$m_c = \frac{m_S}{\left[\frac{R_C}{R^{**}_{NCS}} - 1\right]^2} = \mathbf{10{,}61 \cdot 10^{20}}\ K_g$$

$$m_x = \frac{m_S}{\left[\frac{R_C}{R^{*}_{NXS}} - 1\right]^2} = \mathbf{1{,}658 \cdot 10^{19}}\ K_g$$

Ripetendo il calcolo, per successive approssimazioni, si ricava :

$K^{*2}_c = 70{,}796\ \frac{K^3_m}{sec^2}$; $d = 1241{,}2\ K_m$; $R_{NCS} = 9929{,}6\ K_m$

$m_c = 11{,}45 \cdot 10^{20}\ K_g$; $m_x = 1{,}789 \cdot 10^{19}\ K_g$

Noti i valori di prima approssimazione, si può anche utilizzare direttamente la relazione :

$$K_c = \frac{K^3_S}{R^3_C} \cdot \left(\frac{n_C}{n_X}\right)^6 \cdot \frac{T^2_P}{4 \cdot \pi^2}$$

da cui , con $\left(\frac{n_C}{n_X}\right)^2 = 8$ si ricavano i valori :

$m_C = \mathbf{13{,}32 \cdot 10^{20}}\ K_g$; $R_{NCS} = \mathbf{10710}\ K_m$; $m_x = \mathbf{2{,}081 \cdot 10^{19}}\ K_g$; $d = \mathbf{1338{,}7}\ K_m$

Con le stesse ipotesi, limitandoci alla prima approssimazione, per gli altri asteroidi, si ricava :

Pallade – $T_p = 10{,}1$ h

m $= \mathbf{1{,}799 \cdot 10^{20}}\ K_g$; $\mathbf{m_x} = \mathbf{6{,}32 \cdot 10^{18}}\ K_g$; **d** $= \mathbf{738}\ K_m$

Vesta – $T_p = 5{,}34$ h

m $= \mathbf{2{,}045 \cdot 10^{20}}\ K_g$; $\mathbf{m_x} = \mathbf{4{,}04 \cdot 10^{18}}\ K_g$; **d** $= \mathbf{504}\ K_m$

Psiche – $T_p = 4,30$ h

$\mathbf{m} = \mathbf{2,388 \cdot 10^{19}}$ K_g ; $\mathbf{m_x} = \mathbf{4,72 \cdot 10^{17}}$ K_g ; $\mathbf{d} = \mathbf{213}$ K_m

Giunone - $T_p = 7,21$ h

$\mathbf{m} = \mathbf{1,029 \cdot 10^{19}}$ K_g ; $\mathbf{m_x} = \mathbf{6,43 \cdot 10^{17}}$ K_g ; $\mathbf{d} = \mathbf{227}$ K_m

Davida – $T_p = 5,17$ h

$\mathbf{m} = \mathbf{2,998 \cdot 10^{19}}$ K_g ; $\mathbf{m_x} = \mathbf{5,93 \cdot 10^{17}}$ K_g ; $\mathbf{d} = \mathbf{260}$ K_m

Eros – $T_p = 5,27$ h

$\mathbf{m} = \mathbf{9,728 \cdot 10^{18}}$ K_g ; $\mathbf{m_x} = \mathbf{!,37 \cdot 10^{18}}$ K_g ; $\mathbf{d} = \mathbf{181}$ K_m

7 – Marte : sono note le posizioni ed i periodi di rivoluzione dei due satelliti.

Phobos – $R_P = \mathbf{9374}\ K_m$; $T_P = \mathbf{0,31891}$ g

dim $= (\mathbf{26,3 \cdot 22,4 \cdot 18,4})\ K_m^3$

Deimos – $R_D = \mathbf{23458}\ K_m$; $T_D = \mathbf{1,26244}$ g

dim $= (\mathbf{10,4 \cdot 12,2 \cdot 15})\ K_m^3$

Si ricavano i valori : $$K_M^2 = V_P^2\ R_P = V_D^2\ R_D = \mathbf{42832}\ \frac{K_m^3}{sec^2}\ ;$$

$$m_M = \frac{\mathbf{K_M^2}}{\beta} = \mathbf{0,64191 \cdot 10^{24}}\ K_g$$

Il punto neutro risulta :

$$R_{NMS} = \frac{R_M}{\mathbf{1} + \left(\frac{\mathbf{m_S}}{\mathbf{m_M}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \mathbf{129562}\ K_m$$

360