– **significato e definizione di spazio e tempo**, **teoria dello spaziotempo di Minkowski e cono di luce**

Nei paragrafi precedenti abbiamo parlato dello spazio e del tempo percepiti, che, per definizione stessa di percezione, traggono origine da un processo di ricostruzione del cervello e dunque esistono solo come realtà soggettive.

Rimane dunque senza risposta la domanda su che cosa innesca il processo di percezione e in definitiva su che cosa è lo spazio.

Nella realtà, dare una definizione **dello spazio fisico** nel quale ci muoviamo non è facile e ci vediamo costretti ad **assumerlo come concetto primitivo**, accontentandoci di descriverlo solo indirettamente attraverso le sue proprietà che rileviamo interagendo con esso.

L'idea primitiva dello spazio è sempre stata quella associata a un'estensione "**vuota**" all'esterno dell'uomo.
Ci si accorge dell'impossibilità di definirlo solo quando si abbandona questa idea per considerarlo, non più come **un contenitore vuoto della realtà**, ma il " **luogo** " in cui esiste la materia più rarefatta, evanescente.

Rapportando la posizione del proprio corpo a quella degli altri, si acquisisce facilmente la consapevolezza dell'esistenza dello spazio, ma quando si cerca di dare una definizione chiara , ci si rende subito conto che, per farlo, si deve allargare l'indagine su molti suoi aspetti, in particolare: sulla sua natura, sulla sua esistenza oggettiva e sulla sua struttura metrica (geometria).

Con l'indagine e l'eleborazione di tutti questi aspetti, **il concetto di spazio è cambiato molto nel corso della storia del pensiero** e la sua evoluzione **è andata di pari passo e si è identificata** con l'evoluzione del nostro modo di osservare la realtà. Per questa ragione, storicamente, lo spazio, così come il tempo, viene rappresentato e gli viene dato un significato diverso a seconda della cultura prevalente.

Senza dubbio, **il concetto di spazio più noto** è quello che, scientificamente, viene descritto come **un luogo di punti geometrici** attraverso un sistema di assi cartesiani.
A questo punto, lo spazio, come sistema di riferimento, diventa indipendente dai corpi in esso contenuti ed **acquista un valore assoluto**.

Un concetto legato allo spazio è quello di **luogo**, inteso come posto occupato

44a

dagli oggetti, necessario per la percezione sia **dell'esistenza** (nel luogo) che **del movimento**, inteso come traslazione da un luogo all'altro.

Come abbiamo visto trattando l'origine del tempo, esso nasce proprio dalla esigenza di descrivere i cambiamenti spaziali e quindi tutto ciò che si muove o si trasforma nello spazio viene acquisito dalla memoria e descritto anche a livello temporale.

La percezione del "tempo" diventa così la presa di coscienza che la realtà di cui siamo parte si è modificata.
Attraverso lo spazio di memoria occupato viene anche percepita **la rapidità con la quale si realizzano i cambiamenti e non solo il** "**prima**" **e** "**dopo**".

Dunque, prima ancora di introdurre il concetto di velocità, **che lega lo spazio al tempo**, **il legame tra le due entità veniva già percepito**, **anche se non esistevano le condizioni per fare una valutazione quantitativa**.

La prima percezione del tempo è stata quella legata al moto ciclico dei corpi celesti e quindi il tempo stesso, insieme allo spazio era ciclico, ripetitivo.
Il sorgere del Sole non segnava l'inizio di un nuovo giorno, ma il ritorno dello spazio "esterno" **nella esatta condizione del giorno precedente**, al fine di consentire il ripetersi degli eventi.

Anche la morte, per lungo tempo, è stata avvertita come la fine di un ciclo che sarebbe comunque iniziato nuovamente con la rinascita.
Fu poi nel pensiero cristiano, con sant'Agostino che il tempo venne concepito in senso **lineare**, **progressivo e non più ciclico** come nel mondo pagano.

E'di questo periodo la definizione fondamentale di Newton, secondo il quale **il tempo scorre immutabile**, **sempre uguale a se stesso**.

Secondo la concezione del tempo e dello spazio immutabili, quando si passa dalla percezione alla valutazione scientifica, la rapidità del cambiamento di una configurazione viene sostituita dal concetto di velocità, apparentemente semplice nella definizione, se non si considerano le reali misurazioni richieste per poterla valutare.

Se abbiamo un punto nello spazio, rivelarne l'esistenza vuol dire **localizzarlo nel tempo e nello spazio**.
Per farlo è necessario interagire con esso e questo si realizza attraverso dei

44b

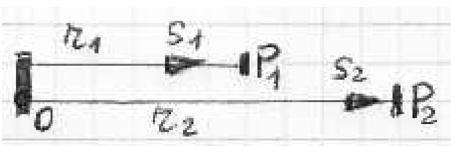
segnali. In uno **spazio assoluto** come quello immaginato da Newton il rilievo degli oggetti non pone alcun problema in quanto essi, in quanto **visibili**, sono presenti contemporaneamente in quei punti dello spazio e quindi anche tutte le interazioni sono sempre presenti.

Questo significa che tutti i punti dello spazio si scambiano le loro azioni con una velocità infinitamente elevata. Nella realtà però se anche per lo spazio la situazione fosse questa, **non lo è certamente per noi osservatori**, che non conosciamo segnali con velocità di propagazione infinita.

Se un osservatore O vuole verificare la presenza nel punto P dello spazio al tempo t di un oggetto alla distanza r, invia un segnale che si propaga con la velocità V_m , raggiunge il punto P e viene riflesso per essere intercettato nel punto O.
Il segnale inviato al tempo t_0 raggiunge il punto P dopo un tempo Δt_1 dato da: $\Delta t_1 = \dfrac{r}{V_m}$.

Dopo essere stato riflesso il segnale impiega un tempo $\Delta t_2 = \dfrac{r}{V_m}$ per ritornare all'osservatore.
Dado che la risposta si rende disponibile solo al tempo $t_r = t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2$, l'osservatore non può essere certo che quello che osserva sia la situazione attuale, e può solo affermare che l'oggetto **era** presente nel punto P al tempo $t_1 = t_0 + \Delta t_1$.
Quello che abbiamo detto può sembrare banale, ma lo è molto meno quando si deve rilevare un oggetto a grande distanza utilizzando un segnale piuttosto lento nella propagazione.

Con riferimento alla figura, supponiamo di voler rilevare la presenza di aerei nello spazio entro il raggio di **10** K_m , utilizzando degli ultrasuoni.



44c

Nell'istante t_0 inviamo due segnali $\mathbf{s_1}$ ed $\mathbf{s_2}$ nelle direzioni indicate in figura e riceviamo due segnali di ritorno dopo gli intervalli di tempo :

$$\Delta t_1 = \mathbf{52.94}\,\text{sec} \quad \text{e} \quad \Delta t_2 = \mathbf{58.82}\,\text{sec}$$

Tenendo conto che la velocità di propagazione degli ultrasuoni nell'aria vale $V_m = \mathbf{340}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, deduciamo la posizione di due aerei alle distanze :

$$r_1 = \frac{\Delta t_1 \cdot V_m}{2} = \mathbf{8.9998}\,\text{K}_\text{m} \quad ; \quad r_2 = \frac{\Delta t_2 \cdot V_m}{2} = \mathbf{9.9994}\,\text{K}_\text{m}$$

Questa interpretazione dei risultati non è però l'unica.

Se consideriamo la distanza tra gli ipotetici aerei : $d_{12} = r_2 - r_1 = \mathbf{999.6}\,\text{m}$, il segnale a ultrasuoni per propagarsi da un aereo all'altro impiega un tempo

$$\Delta t_s = \frac{d_{12}}{V_m} = \mathbf{2.94}\,\text{sec}\ .$$

Se P_1 è un aereo ultrasonico, in un tempo minore di Δt_s può spostarsi dal punto P_1 al punto P_2 e riflettere quindi il segnale $\mathbf{s_2}$ in arrivo.

Non potendo noi distinguere i due casi, ci chiediamo: Qual'è la realtà?
La risposta è che **è reale quello che osserviamo** e dunque non esiste una sola realtà.

Naturalmente, per noi che siamo abituati a identificare la realtà con tutto ciò che cade sotto i nostri sensi, diventa difficile accettare l'idea che quello che "vediamo" con il nostro segnale non sia vero.

Se analizziamo in dettaglio i due casi, vediamo che il problema nasce perchè, anche se i segnali inviati sono simultanei, qualunque sia il tipo di segnale, che viene utilizzato, propagandosi con la stessa velocità V_m , non è possibile farli giungere nello stesso istante in due punti a distanza diversa dalla sorgente.

Questo vuol dire che, **se identifichiamo il tempo** t_0, in cui partono i segnali per l'osservazione, **con il presente**, **nello spazio non possono esistere nello stesso istante due realtà "osservabili" in punti a diversa distanza**

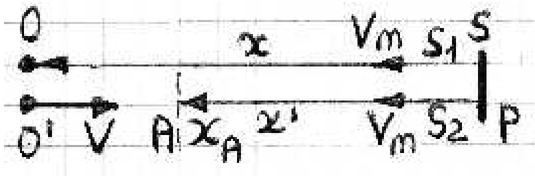
44d

dalla sorgente di segnali.
La realtà presente è data solo dai punti equidistanti dall'osservatore.

Essendo il tempo presente, per definizione, quello rilevato dall'osservazione in atto, **ad ogni valore dello spazio r si associa un valore del tempo**, **per cui ogni presente dello spazio è individuato dalla coppia di coordinate** $(r\,;t)$ **e ogni punto P del presente dai valori** $(r\,;\vartheta\,;\varphi\,;t)$.

E' chiaro quindi, a questo punto, che se un osservatore è in moto rispetto allo spazio, **considerato solidale con il mezzo in cui si propagano i segnali**, i valori delle coordinate dei punti dello spazio risulteranno variabili in rapporto alla posizione che l'osservatore occupa nel tempo.

Nasce quindi il problema di definire come le coordinate spaziale e temporale di un punto dello spazio, rilevate da un osservatore immobile, si trasformano **se lo stesso punto viene osservato da uno mobile**.
Il problema verrà trattato diffusamente in seguito, per cui facciamo ora solo i pochi cenni necessari agli scopi attuali.



Con riferimento alla figura, indicando con $(\mathbf{x}\,;t)$ le coordinate della sorgente S rilevate dall'osservatore immobile, **solidale con la sorgente ed il mezzo di propagazione dei segnali**, le coordinate $(\mathbf{x}'\,;t')$ **della stessa sorgente** rilevate dall'osservatore **in moto rispetto al mezzo** (e alla sorgente) con la velocità V, si ottengono osservando che, mentre il segnale $\mathbf{s_2}$ si muove verso O', quest'ultimo si sposta verso la sorgente con la velocità V.

Il segnale intercetterà dunque l'osservatore O' nel punto A, dopo un tempo t'

dato dalla : $$V \cdot t' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$$

con : $$\mathbf{x} = V_{\mathbf{m}} \cdot t \quad \text{e} \quad \mathbf{x}' = V_{\mathbf{m}} \cdot t'$$

44e

da cui si ottiene la trasformazione :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \left(x - V \cdot t'\right) \\ t' &= t - \frac{V \cdot x'}{V_m^2} \end{aligned}\right\}$$

Un problema speculare è quello di esprimere la coordinata **x'**, nel riferimento immobile O.

La posizione del punto A, valutata dall'osservatore immobile O, si ricava con

le relazione : $\left\{\begin{aligned} x - x_o' &= V \cdot t \\ x &= V_m \cdot t \\ x_o' &= V_m \cdot t_o' \end{aligned}\right\}$ da cui : $\left\{\begin{aligned} x_o' &= x - V \cdot t \\ t_o' &= t - \frac{V \cdot x}{V_m^2} \end{aligned}\right\}$

dove tutte le misure vengono rilevate dall'osservatore immobile.
Differenziando e dividendo membro a membro si ottiene :

$$\frac{\Delta x_o'}{\Delta t_o'} = \frac{\left(\Delta x - V \cdot \Delta t\right)}{\Delta t - \dfrac{V \cdot \Delta x}{V_m^2}} = \frac{\Delta t \cdot \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - V\right)}{\Delta t \left(1 - \dfrac{V}{V_m^2} \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right)}$$

sostituendo : $\dfrac{\Delta x_o'}{\Delta t_o'} = v_o'$ e $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v$

si ricava così la relazione :

$$v_o' = \frac{v - V}{1 - \dfrac{V \cdot v}{V_m^2}}$$

44f

che esprime la legge di composizione delle velocità generalizzata.

Si noti che : $$v_o' = \frac{\Delta x_o'}{\Delta t_o'} \neq v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$$

in quanto v' è la velocità misurata dal riferimento mobile O', mentre v_o' è la stessa velocità misurata dal riferimento O.

Ritornando all'esempio degli aerei, osserviamo che le realtà che sono state rilevate differiscono per il fatto che la prima è associata a una configurazione stazionaria dello spazio, mentre nel secondo caso si ha una evoluzione della configurazione **che non può essere messa in evidenza** perchè la velocità dell'aereo è maggiore di quella del segnale che **potrà quindi raggiungerlo solo quando esso si fermerà**, **nel punto** P_2.

Questo ci dice che un oggetto, **per poter essere osservabile** , non si deve muovere nello spazio con una velocità maggiore di quella del segnale usato per rilevare la sua presenza. In termini equivalenti:

La velocità di propagazione del segnale, V_m, rappresenta il valore massimo raggiungibile, "**in quello spazio**", da un punto, **per poter essere osservabile**.

Questo limite viene messo in evidenza anche dalla relazione che esprime la composizione delle velocità. Infatti, se v e/o V è uguale a V_m, la velocità che viene misurata dall'osservatore O risulta sempre $v_o' = V_m$.

Conseguenza rilevante dei risultati che abbiamo ottenuto è **l'impossibilità di misurare " simultaneamente " la posizione di due punti posti a diversa distanza dall'osservatore**, anche se i due punti sono a distaza fissa e sono legati tra loro attraverso una struttura rigida.

Abbiamo visto che a ciascun punto dello spazio sono associate le coordinate spaziale e temporale $(r\,;t)$ dove r è la distanza del punto da osservare dalla sorgente di segnali e t l'istante in cui il segnale raggiunge il punto $P(r\,;t)$.

Secondo l'interpretazione corrente, la coordinata r è una scelta dell'operatore e quindi rappresenta una variabile indipendente.

44g

La coordinata temporale t viene invece definita da due componenti :

$$t = t(o) + \Delta t$$

$t(o)$ rappresenta il tempo che viene indicato dall'osservatore O quando la sua posizione coincide con l'origine degli assi di riferimento.

Il suo valore è definito dal numero di cicli (oscillazioni) realizzati da **un sistema periodico stazionario**, **o comunque che si possa ritenere tale**, **che viene** "**scelto arbitrariamente**" **ed associato all'osservatore allo scopo di dare un'ordine alle osservazioni fatte**.

E'chiaro che questo oscillatore è utile, quindi è necessario che sia operativo, solo quando l'operatore prevede di effettuare più osservazioni e non sempre, per cui ogni operatore, di volta in volta, potrebbe scegliere il suo oscillatore e sarebbe perfettamente adatto allo scopo.

Questo modo di procedere darebbe all'ordine stabilito un valore unicamente locale, con ovvi problemi di comunicazione tra i diversi osservatori, qualora si rendesse necessario farlo.

Per questa ragione è conveniente scegliere **un solo oscillatore**, posto in un punto dello spazio **scelto arbitrariamente** e capace d'inviare i suoi segnali a velocità infinita in qualsiasi punto dell'universo.

In questo modo tutti i punti dello spazio potrebbero essere forniti di un sistema **capace di ricevere e contare gli impulsi in arrivo**, **partendo da uno zero comune**, **in modo che sia possibile associare a ciascuna osservazione il numero dell'impulso in corrispondenza del quale è stata realizzata**.

La funzione di questo numero è solo quella di consentire di ordinare le osservazioni che vengono effettuate in qualsiasi punto dello spazio e quando viene considerato da solo, senza alcun riferimento a un'osservazione o eventi di qualsiasi natura, **altro non fa che testimoniare l'esistenza del lontano oscillatore che continua ad essere attivo**.

Questo numero che aumenta di una unità ad ogni impulso, **in qualsiasi punto dell'universo**, **senza alcun legame con gli eventi**, **s'identifica con quello che indichiamo come tempo e che** "**scorre**" **indipendentemente dalla nostra volontà**.

44h

Nella realtà, non disponiamo di un oscillatore con le caratteristiche richieste e nemmeno di segnali capaci di trasferirsi nello spazio con velocità infinita.
Si pone quindi il problema di creare un sistema alternativo, capace di dare la stessa risposta.

Se il segnale non si propaga con velocità infinita, con un unico segnale non è possibile associare ad ogni impulso lo stesso numero in punti distanti tra loro nello spazio.

Ogni osservatore dovrà quindi essere corredato di **un oscillatore locale** che dovrà generare sul posto l'impulso per realizzare il conteggio.

Naturalmente, per fare in modo che allo stesso evento, osservato in due punti diversi, venga associato lo stesso numero, gli oscillatori locali devono essere tutti perfettamente uguali tra loro e **sincronizzati con l'oscillatore centrale**, **assunto come campione**.

Per poter fare questa operazione, è necessario conocsere con precisione la velocità di propagazione del segnale campione, che potrà anche non essere dello stesso tipo di quelli utilizzati per le osservazioni.
Per esempio, è possibile utilizzare un segnale luminoso per inviare l'impulso fornito dall'oscillatore e fare le osservazione con segnali a ultrasuoni.

Se indichiamo con V_{sc} la velocità del primo segnale, un oscillatore posto alla distanza r_0 dal campione, **quando riceve il segnale deve essere tarato in modo che l'indicazione sia** $t_0 = \dfrac{r_0}{V_{sc}}$.

Questo tempo s'incrementa di una unità ad ogni ciclo dell'oscillatore e questo indica solo che esso esiste e continua ad oscillare non per noi, ma per conto suo, anche se non si osserva assolutamente nulla. "**Il tempo numerico è quindi una grandezza che ha solo significato convenzionale**".

L'unico tempo che ha significato reale è solo quello percepito dagli esseri viventi e utile per la sopravvivenza.

Se si assume un sistema di assi di riferimento, l'oscillatore **posto nell'origine** indicherà un tempo uguale a quello del campione : $t(O) = t_c$

44i

Se nel sistema di riferimento locale i segnali si propagano con velocità V_m , al punto P , che si trova alla distanza r dall'origine, sarà associato **un tempo universale** dato da :

$$t = t(O) + \frac{r}{V_m}$$

in cui $t(O)$ aumenta con il numero di cicli dell'oscillatore con lo stesso ritmo per tutti i punti dello spazio associato al sistema di riferimento scelto.

Ogni punto dello spazio è quindi individuato dalla coppia di valori $(r\,;t)$ con r che individua la posizione e t l'istante in cui il punto viene osservato.

Se i rilievi vengono fatti da un osservatore mobile con velocità V , la distanza da esso rilevata vale :

$$r' = r - V \cdot t'$$

sostituendo si ha :

$$t' = t(O) + \frac{r - V \cdot t'}{V_m} = t(O) + \frac{r}{V_m} - \frac{V \cdot t'}{V_m} = t - \frac{V \cdot t'}{V_m}$$

da cui si ricava il tempo misurato dall'osservatore mobile :

$$t' = t \cdot \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1} + \dfrac{V}{V_m}}$$

Dall'espressione del tempo si ricava : $t_s = t - t(O) = \dfrac{r}{V_m}$

Il primo membro rappresenta la differenza tra il tempo associato allo spazio posto alla distanza r dall'origine O e quello associato all'origine stessa, così come in un sistema di assi cartesiani il valore della coordinata di un punto è uguale alla differenza tra il valore associato al punto e quello dell'origine, che generalmente si assume uguale a zero.

In questo senso la quantità $\left(t - t(O)\right)$ **si può interpretare come una**

44k

coordinata temporale da associare alla distanza r (superficie sterica di raggio r).

Sostituendo alla distanza r le coordinate cartesiane, si può scrivere :

$$t_s^2 = \frac{r^2}{V_m^2} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{V_m^2} = \frac{x^2}{V_m^2} + \frac{y^2}{V_m^2} + \frac{z^2}{V_m^2}$$

e quindi, con ovvio significato dei simboli possiamo scrivere la relazione tra le coordinate temporali :

$$t_s^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$$

Analogamente, ponendo $t_s^2 \cdot V_m^2 = r^2$, la stessa relazione si può scrivere con le coordinate spaziali : $r^2 = \left(t_s \cdot V_m\right)^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Ricordiamo che fu Minkowski che, **dopo la pubblicazione** della teoria della relatività di Einstien, per primo, introdusse il tempo come quarta dimensione, trattando per la prima volta spazio e tempo come **parti di una sola entità**, un continuum spazio – tempo a quattro dimensioni, "**trattando spazio e tempo allo stesso modo**".

Facciamo però osservare che, anche se le relazioni che abbiamo scritto sono corrette da un punto di vista formale, presentano gravi incongruenze fisiche e, più in generale, concettuali.

Abbiamo infatti due relazioni "**assolutamente identiche**", scritte una volta in termini spaziali e l'altra usando notazioni temporali, senza tener conto che lo spazio fisico ha caratteristiche peculiari proprie che non si possono attribuire al tempo senza conseguenze.

L'espressione con le coordinate spaziali $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$
è certamente corretta sia da un punto di vista fisico che matematico, in quanto uno spostamento ha caratteristiche vettoriali, nel senso che è caratterizzato, oltre che dal valore numerico, anche dalla direzione e dal verso, per cui se si realizzano contemporaneamente gli spostamenti **x** , **y** , **z** nelle direzioni degli assi, si compie un'operazione in tutto equivalente ad un unico spostamento r nella direzione risultante.

Per uno spostamento infinitesimo, si può anche scrivere :

44I

$$\left(\Delta r\right)^2 = (\Delta \mathbf{x})^2 + (\Delta \mathbf{y})^2 + (\Delta \mathbf{z})^2$$

In termini temporali, la relazione $t_s^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$ risulta corretta, **da un punto di vista matematico**, in quanto è stata ottenuta dividendo entrambi i membri dell'espressione spaziale per la stessa quantità.

Si deve però tenere presente che dalla relazione definizione : $\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{dS}}{dt}$

si ricava correttamente : $\overrightarrow{dS} = dt \cdot \vec{V}$ che, integrata con $\vec{V}$ = **costante** ,

fornisce anche : $\vec{S} = t_s \cdot \vec{V}$

ossia : $\vec{S} = \overrightarrow{S_x} + \overrightarrow{S_y} + \overrightarrow{S_z} = t_s \cdot \vec{V} = t_s \cdot \left(\overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} + \overrightarrow{V_z}\right) =$

$$= \left(t_s \cdot \overrightarrow{V_x} + t_s \cdot \overrightarrow{V_y} + t_s \cdot \overrightarrow{V_z}\right)$$

Queste relazioni dicono che **il vettore $\vec{S}$, che descrive lo spazio percorso nel tempo t_s da un punto materiale che si sposta con velocità** $\vec{V}$, **è equivalente alla somma vettoriale degli spazi percorsi nella direzione degli assi del sistema di riferimento nello stesso tempo t_s**.

Dividendo le componenti **per il tempo comune**, si ottengono le componenti delle velocità **necessarie per produrre lo spostamento assegnato** che in genere risulteranno diverse tra loro.

In definitiva, lo spostamento $\vec{S}$ del punto materiale, prodotto nel tempo t_s, può essere descritto (e in questo senso è equivalente) come la somma vettoriale degli spostamenti prodotti **dallo stesso punto nello stesso tempo** lungo gli assi di riferimento, muovendosi con le velocità :

$$\overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} + \overrightarrow{V_z} = \frac{\overrightarrow{S_x} + \overrightarrow{S_y} + \overrightarrow{S_z}}{t_s} = \frac{\overrightarrow{S_x}}{t_s} + \frac{\overrightarrow{S_y}}{t_s} + \frac{\overrightarrow{S_z}}{t_s}$$

Abbiamo dunque spazi diversi che vengono percorsi nello stesso tempo con velocità diverse. Naturalmente questa equivalenza si rivela di grande utilità in tutta la fisica.

44m

Il nostro problema non è però descrivere il moto di un punto materiale, **ma rilevare la sua presenza ad una distanza** r **dall'origine**, **in un istante arbitrario** t, **indipendente dalla posizione del punto nello spazio**.
Per farlo inviamo un segnale che si propaga **con velocità** V_m **caratteristica del mezzo**, **indipendente dalla direzione di propagazione**, e misuriamo il tempo t_s richiesto per raggiungerlo.

Se V_m non dipende dalla direzione di propagazione del segnale, diventa una grandezza scalare e non si può parlare di componenti della velocità, in quanto dovrà essere :

$$V_x = V_y = V_z = V_m$$

Non è quindi possibile usare, **con qualche riferimento alla realtà fisica**, la notazione vettoriale: $\vec{r} = \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}} = t_s \cdot \overrightarrow{V_m}$

Se V_m è costante per i tre segnali che si spostano sugli assi, per produrre gli spostamenti **x** , **y** , **z** , **diversi fra loro**, dovranno essere diversi i tempi sui tre assi, per cui si dovrà scrivere una relazione del tipo :

$$\vec{r} = \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}} = V_m \cdot \vec{t_s}$$

da cui si ricava : $\vec{t_s} = \dfrac{\vec{r}}{V_m} = \dfrac{\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}}{V_m} = \dfrac{\vec{\mathbf{x}}}{V_m} + \dfrac{\vec{\mathbf{y}}}{V_m} + \dfrac{\vec{\mathbf{z}}}{V_m}$

si ha quindi, con ovvio significato dei simboli :

$$\vec{t_s} = \vec{t_x} + \vec{t_y} + \vec{t_z}$$

oppure con i moduli : $t_s^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$

Sotto questa forma "possiamo dire che la relazione descrive un tempo a tre dimensioni".

Per mettere in evidenza l'esistenza dello spazio in cui i segnali si propagano, esprimiamo una dimensione esplicitando lo spazio percorso.

Si può, per esempio, sostituire : $t_s^2 = \dfrac{r^2}{V_m^2}$ e si ha quindi :

44n

$$\frac{r^2}{V_m^2} = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$$

A questo punto si deve osservare che per un punto dello spazio P, che venga osservato nel generico istante t , le componenti che lo caratterizzano $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t$ sono tutte indipendenti tra loro e non hanno nulla in comune con le componenti $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t$ che vengono utilizzate per descrivere il moto di un punto, in quanto in questo caso, anche se non viene precisato, il tempo t è in realtà inteso come l'intervallo di tempo t_s che abbiamo già introdotto.

Dunque, mentre t è scelto arbitrariamente, **indipendentemente da $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$, il tempo t_s è proporzionale al percorso r del segnale**.

Se abbiamo una sorgente di segnali S ed un osservatore O a una distanza **x** costante, mentre il tempo t aumenta linearmente, per la definizione stessa di tempo, sia per la sorgente che per l'osservatore, l'intervallo di tempo t_s , che il segnale impiega per raggiungere l'osservatore ha un valore costante e non ha le caratteristiche di un tempo.

Pur essendo intimamente legati, **spazio e tempo sono due entità con caratteristiche completamente diverse**.
A parte l'aspetto quantitativo, **la differenza fra due lunghezze è ancora una lunghezza** "**con le stesse caratteristiche**", **mentre la differenza fra due tempi dà** "**un intevallo di tempo**", **che non ha più le caratteristche di un tempo**.

Se abbiamo quindi un punto P alla distanza r dall'origine e viene osservato al tempo t , il valore della quantità $r^2 - V_m^2 \cdot t^2$, rilevata da un osservatore immobile, dipende dal valore scelto per il tempo t, che non dipende da r.

La stessa quantità, rilevata da un osservatore O', in moto rispetto al mezzo con la velocità V, sarà espressa da una relazione del tipo: $r'^2 - V_m^2 \cdot t'^2$ dove r' e t' sono in relazione con r e t, ma t' sarà ancora indipendente da r'.

Se, seguendo il pensiero di Poincarè, si ricavano i nuove valori applicando le

44o

trasformazioni di Lorentz, con una sola coordinata spaziale, si scrive :

$$x'^2 - V_m^2 \cdot t'^2 = \gamma^2 \cdot \left(x - V \cdot t\right)^2 - \gamma^2 \cdot V_m^2 \cdot \left(t - \frac{V}{V_m^2} \cdot x \right)^2$$

Questa relazione non può essere corretta, in quanto si ha al primo membro il tempo t' indipendente da x', la secondo membro il tempo t dipende invece da x ed è uguale all'intervallo di tempo impiegato dal segnale a raggiungere l'osservatore, ossia si ha : $t = t_s = \dfrac{x}{V_m}$

Se al tempo si attribuisce lo stesso significato al primo e al secondo membro, la relazione fornisce correttamente : $x'^2 - V_m^2 \cdot t_s'^2 = x^2 - V_m^2 \cdot t_s^2$

Considerando le tre dimensioni **x**, **y**, **z**, si ha così l'invariante di Poincarè :

$$x^2 + y^2 + z^2 - V_m^2 \cdot t_s^2$$

Si deve tenere presente che t_s non rappresenta il tempo che, **secondo la definizione**, **aumenta regolarmente**, **indipendentemente dallo spazio**, **ma un intervallo di tempo di valore definito**.

Se si sostituisce l'intervallo di tempo t_s con un istante t scelto arbitrariamente per osservare il punto alla distanza r dall'origine, l'espressione che si ottiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - V_m^2 \cdot t^2$$

non è invariante rispetto ai riferimenti inerziali e non è rappresentativa di nessuna grandezza fisicamente significativa.

Proprio per l'arbitrarietà del tempo t , Minkowski pensò di interpretarlo come una quarta dimensione dello spazio.
La moltiplicazione per la velocità costante V_m è utile per rendere omogenea questa nuova dimensione con quelle spaziali.

Con questa interpretazione, in analogia con lo spazio a tre dimensioni, **se il termine** $\left(V_m^2 \cdot t^2\right)$ **fosse positivo**, **la quantità** :

44p

$$r_4(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},t) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 + V_m^2 \cdot t^2$$

potrebbe essere interpretata come "**distanza**" **di un evento dall'origine** $O(0,0,0,0)$ **di uno spazio con tre dimensioni spaziali ed una temporale**. **Nella forma**, **in cui la dimensione temporale viene espressa in termini spaziali**, " si dice che l'espressione descrive i punti di uno spazio-tempo "**, ossia un'entità a quattro dimensioni**, **in cui il tempo e lo spazio s'intrecciano come realtà interdipendenti**.

Anche se, con la sostituzione del tempo t_s con la variabile t, l'espressione di Minkowski non ha più nulla in comune con l'invariante di Poincarè, egli non ha percepito l'importanza della sostituzione ed ha cercato di derivare da esso la la sua relazione con diversi artifici matematici.

Non sempre però un'equazione matematica, **anche se viene correttamente formulata**, fornisce risultati fisicamente accettabili e la relazione utilizzata da Minkowski, **presenta molte incoerenze dal punto di vista fisico**.

Innanzitutto, per avere il quarto termine positivo, egli introduce il coefficiente immaginario di Gauss : $i = \sqrt{-1}$

e ottiene formalmente :

$$r_4^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, iV_m t) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 + (i \cdot V_m \cdot t)^2$$

Il fattore immaginario è stato introdotto unicamente per ottenere

formalmente

l'espressione pitagorica, ma si tratta comunque di un artificio matamatico che fisicamente non ha alcuna giustificazione ed è finalizzato **solo al trattamento del tempo come quarta dimensione**. Si ha dunque :

$$r_4^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, iV_m t) = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2 - (V_m \cdot t)^2$$

che non è invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz e lo diventa solo quando $t = t_s$.

In questo caso si ha : $r_4^2(r, iV_m t_s) = r^2 - (V_m \cdot t_s)^2 = \mathbf{0}$

possiamo quindi scrivere :

$$r_4^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, iV_m t) - r_4^2(r, iV_m t_s) = (V_m \cdot t_s)^2 - (V_m \cdot t)^2$$

44q

e quindi :

$$r_4^2\left(r,\, iV_m t\right) = V_m^2 \cdot \left(t_s^2 - t^2\right)$$

dividendo per la velocità V_m^2 e ponendo : $t_4^2\left(t_s,\, it\right) = \dfrac{r_4^2}{V_m^2}$

si ottiene : $$t_4^2\left(t_s,\, it\right) = t_s^2 - t^2$$

Che rappresenta "**lo stesso spazio**" **descritto in termini solo temporali**, **che potremmo chiamare** " quadritempo ".

E' da notare che la distanza r percorsa da un segnale nel tempo t_s si scrive normalmente nella forma :

$$\vec{r} = t_s \cdot \overrightarrow{V_m} = t_s \cdot \left(\overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} + \overrightarrow{V_z}\right)$$

che mette in evidenza la somma vettoriale di tre percorsi nella direzione degli assi realizzati nello stesso tempo a velocità diverse, in disaccordo con la tesi dell'indipendenza della velocità del segnale dalla direzione di propagazione.

Più coerente con questa ipotesi si presenta invece la forma :

$$\vec{r} = V_m \cdot \vec{t_s} = V_m \cdot \left(\vec{t_x} + \vec{t_y} + \vec{t_z}\right)$$

dove t_x, t_y, t_z non sono dei tempi, ma intervalli di tempo e dunque la relazione ha significato.
Per chiarire questo punto, realizziamo il seguente esperimento ideale.

Sappiamo che normalmente il rilievo della posizione di un punto dell'universo può essere realizzato inviando direttamente un segnale e misurando il tempo impiegato per raggiungerlo.
Nota la velocità di propagazione dei segnali, si ricava : $r = V_m \cdot t_s$.

Analogamente, assumiamo un sistema di assi cartesiani come riferimento e inviamo un segnale dall'origine lungo l'asse x, che si propaga per un tempo misurato t_x. Viene poi riflesso nella direzione dell'asse y, per propagarsi per un tempo t_y. Viene quindi riflesso definitivamente lungo l'asse z e si propaga per un tempo t_z per essere poi raccolto da un osservatore nel punto P.

44r

Se ora inviamo **un segnale dello stesso tipo** dall'origine O direttamente al punto P, l'esperienza dimostra che il tempo impiegato risulta :

$$t_s^2 = t_x^2 + t_y^2 + t_z^2$$

e quindi si ricava : $r^2 = V_m^2 \cdot t_s^2$

essendo la velocità V_m costante in tutte le direzioni, possiamo calcolare tutte le componenti e quindi la distanza $\overline{OP}$ anche con la relazione :

$$r^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2$$

In questo modo, se si assume un'origine come riferimento, **corredata di un oscillatore indipendente**, come abbiamo visto, ad ogni punto si associa un tempo, che s'incrementa **in tutto l'universo con lo stesso ritmo**, secondo la definizione che abbiamo dato.

Questa descrizione risulta perfettamente coerente con le osservazioni sperimentali.

Con la relazione scritta con le coordinate spaziali, **usata da Minkowski ed universalmente accettata**, l'espressione è vista nella forma :

$$\vec{r} = t_s \cdot \overrightarrow{V_m} = \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}$$

da cui :

$$\overrightarrow{V_m} = \frac{\vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}}{t_s} = \frac{\vec{\mathbf{x}}}{t_s} + \frac{\vec{\mathbf{y}}}{t_s} + \frac{\vec{\mathbf{z}}}{t_s} = \overrightarrow{V_x} + \overrightarrow{V_y} + \overrightarrow{V_z}$$

in disaccordo con l'indipendenza della velocità di propagazione dei segnali dalla direzione.

Minkowski ha considerato, in maniera artificiosa, l'espressione **nella forma** "**arbitraria**",

$$\vec{r} = \overrightarrow{t_s \cdot V_m} = \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{z}}$$

che non esplicita quale dei due fattori è un vettore, per poter scrivere la espressione con i moduli, trattando così il prodotto $\left(t_s \cdot V_m\right)$ come il modulo di un vettore; scrive dunque :

$$V_m^2 \cdot t_s^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2$$

Si tenga presente che, mentre per lo spazio la differenza tra due lunghezze è

44s

ancora una lunghezza e quindi conserva tutte le caratteristiche dello spazio, per il tempo non è così.

La diffrenza tra due tempi fornisce un **intervallo di tempo**, **che è un valore definito e costante e quindi non ha le caratteristiche di un tempo**, **che per definizione è un conteggio di impulsi e come tale aumenta con un ritmo costante**.

Abbiamo visto che il tempo è indicato da un oscillatore indipendente solidale con un sistema di riferimento universale.
Qualsiasi punto dello spazio universale è quindi individuato dalla distanza che lo separa da questo riferimento, rilevabile inviando un segnale e l'istante in cui il segnale viene inviato.

Se si deve analizzare uno spazio limitato dell'universo, si assume **un sistema di riferimento locale**, **nella cui origine viene posto un oscillatore uguale a quello campione**, **con esso sincronizzato**.

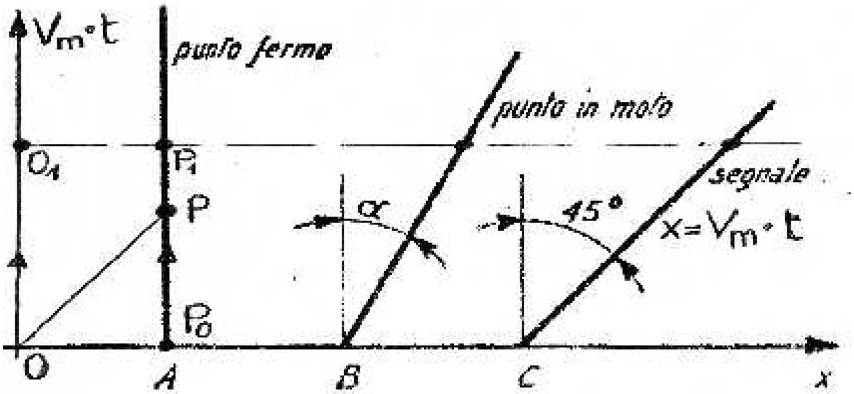
Un punto dello spazio è completamente individuato dalla terna di coordinate spaziali e dall'istante t in cui si realizza l'osservazione.
Si ha quindi : $P\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t\right)$
Essendo la distanza dall'origine : $r^2 = \mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2$
si può anche scrivere : $P\left(r; \vartheta; \varphi; t\right)$.
Se Δt_s è il tempo impiegato dal segnale inviato dall'origine O per percorrere il tratto $\overline{OP}$, si ha : $r = \left(V_m \cdot \Delta t_s\right)$
e quindi le indicazioni richieste per individuare il punto P saranno :

$$P\left(\left(V_m \cdot \Delta t_s\right); \vartheta; \varphi; t\right)$$

Per semplicità di esposizione, consideriamo una sola componente spaziale e scriviamo quindi : $P\left(\left(V_m \cdot \Delta t_s\right); t\right)$
Se si vogliono riportare su assi cartesiani le due componenti ed operare su di esse, pur non essendo indispensabile, è conveniente **renderle omogenee**, dividendo oppure moltiplicando per una velocità, **scelta arbitrariamente**.
La scelta più opportuna è la velocità del segnale utilizzato per i rilievi V_m **.**
Si hanno così le indicazioni :

$$P\left(\Delta t_s; t\right) \quad \text{oppure} \quad P\left(V_m \cdot \Delta t_s \,;\, V_m \cdot t\right)$$

44t



Il diagramma di figura è quello proposto per la prima volta da Minkowski. Un punto A fermo, nella posizione P_0, avrà una coordinata spaziale $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ costante nel tempo, rilevata dall'osservatore O, **solidale con il mezzo in cui si propagano i segnali**, nell'istante $t = 0$.

L'oscillatore presente nell'origine continua comunque ad oscillare, indicando che il tempo "aumenta" per tutto lo spazio, quindi anche per il punto A , che si sposta nella direzione dei tempi, aumentando la coordinata spaziotemporale da P_0 a P, poi a P_1 e così via.

Quando il punto A si trova nella posizione P_1 , se si assumono le coordinate dell'origine $O(0 , 0 , 0 , 0)$, nello spaziotempo si avrebbe un percorso $\overline{OP_1}$ dato da :

$$r^2 = x_0^2 + (V_m \cdot t)^2 = V_m^2 \cdot (t_s^2 + t^2)$$

che fisicamente non ha nessun significato.

Si deve dunque ritenere che il tempo aumenti anche per l'origine, assumendo $O(0 , 0 , 0 , t)$. Questo vuol dire che l'aumento del tempo si deve applicare a tutti i punti dell'universo, **senza eccezioni**. In questo caso, quando il punto A si sposta in P_1, l'origine si sposta parallelamente in O_1 e, da un rilievo della coordinata spaziale, con la velocità del punto $V = 0$, risulta ancora $\mathbf{x} = \mathbf{x_0}$.

Se il punto è in moto con un'equazione del tipo : $\mathbf{x} = \mathbf{x_0} + V \cdot t$

si può scrivere :

$$V_m \cdot t = \frac{V_m}{V} \cdot (x - x_0)$$

44u

che sul diagramma è rappresentata da una retta inclinata come in figura B, in cui abbiamo :

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{V}{V_m}$$

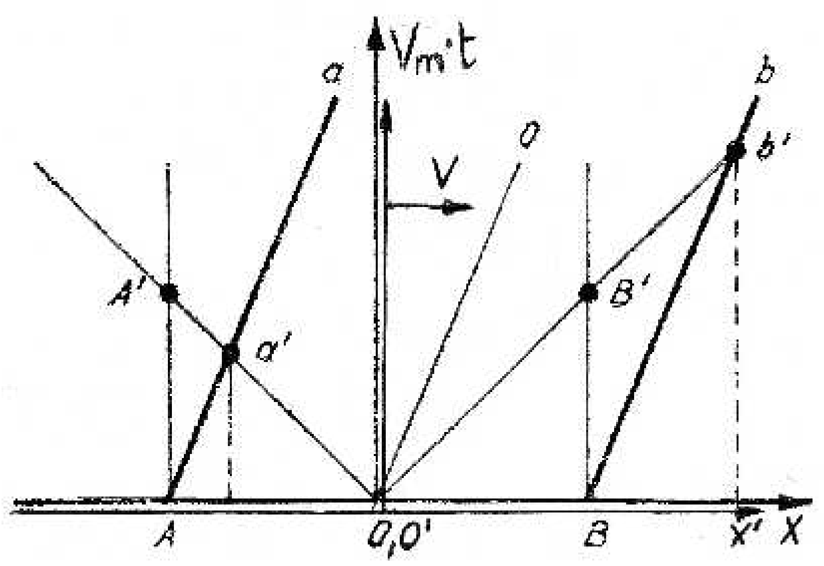
con il valore limite $\text{tg}\,\alpha = 1$ corrispondente al valore massimo $V_{max} = V_m$,

si ha : $\alpha = 45°$ e $(x - x_0) = V_m \cdot t$

Per $V > V_m$ osservare il punto in moto non è più possibile con quel segnale e bisogna ricorrere ad uno che abbia la velocità di propagazione maggiore di V_m .

Escludendo questa possibilità, normalmente la parte di spazio **occupata** dal punto in moto con una velocità $V > V_m$ (**zona associata a** $\alpha > 45°$) viene indicata come "altrove".

Supponiamo ora di avere due osservatori A e B equidistanti dall'osservatore O , come è indicato in figura.



Secondo quanto abbiamo visto, i tre punti A, O, B , **fermi nello spazio**, sono rappresentati nello spaziotempo da tre rette verticali.

Supponiamo ora che dal punto O partano contemporaneamente, nell'istante $t = 0$, due segnali che, per quanto abbiamo visto, saranno rappresentati da due rette inclinate di $45°$.

44v

I due segnali verranno intercettati dagli osservatori, che si spostano nel tempo lungo la verticale, nei punti A’e B’, verificando che risultano ancora simultanei.

Ci domandiamo ora come giudicano lo stesso evento (emissione simultanea di due segnali) due osservatori appartenenti ad un altro sistema di riferimento **in moto rispetto al mezzo in cui si propagano i segnali**, **quindi rispetto al riferimento O**, considerato nel caso precedente.

Per il riferimento O, immobile rispetto al mezzo, i punti A, O’, B non sono più in quiete e quindi le rette che li rappresentano saranno inclinate rispetto alla verticale, secondo la relazione : $V_m \cdot t = \dfrac{V_m}{V} \cdot \left(x - x_0\right)$

e rappresentate in figura con **a**, **o**, **b**.

Queste rette, che rappresentano gli osservatori in moto, intercettano (e quindi rilevano) i segnali, che non sono cambiati, nei punti **a’** e **b’, chiaramente ad una diversa distanza dalla sorgente O e in istanti diversi**.
Per gli osservatori in moto i due segnali non risultano più simultanei.

Il rapporto tra i tempi coincide con quello che è stato ricavato analiticamente con la trasformazione di Galileo generalizzata :

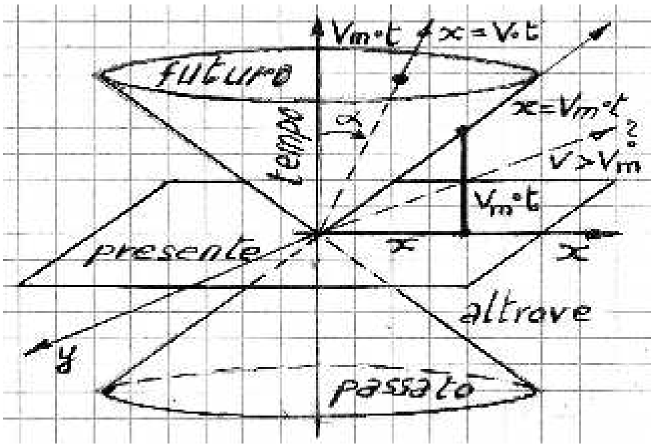
$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \left(x - V \cdot t'\right) \\ t' &= t - \frac{V \cdot x'}{V_m^2} \end{aligned} \right\}$$

da cui si ricava : $t_B = t \cdot \dfrac{1}{1 - \dfrac{V}{V_m}}$; $t_A = t \cdot \dfrac{1}{1 + \dfrac{V}{V_m}}$

e quindi :

$$\frac{t_B}{t_A} = \frac{V_m - V}{V_m - V}$$

Generalmente la rappresentazione che è stata data con una sola dimensione spaziale viene fatta considerando lo spazio piano con le coordinate x , y e la dimensione spaziotemporale $\left(V_m \cdot t\right)$. Ne risulta la figura di rotazione che, con riferimento ai segnali luminosi, viene indicata come cono di luce.



Per un punto in moto con la velocità del segnale (dunque per il segnale) si ha $\mathbf{x} = V_m \cdot t$ ossia : $\mathbf{x} - V_m \cdot t = \mathbf{0}$.

Il primo membro $\mathbf{x} - V_m \cdot t$ risulta invariante rispetto alla trasformazione di Lorentz che, com'è noto, è scritta nella forma :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \gamma \cdot \left(\mathbf{x} - V \cdot t\right) \\ t' &= \gamma \cdot \left(t - \frac{V \cdot \mathbf{x}}{V_m^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

dove la quantità $\mathbf{x} - V \cdot t$ indica il valore della distanza tra il punto da rilevare e l'osservatore mobile vista dal riferimento fisso.

"**La trasformazione di Galileo generalizzata**", è stata ricavata invece nella forma :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \left(\mathbf{x} - V \cdot t'\right) \\ t' &= \left(t - \frac{V \cdot \mathbf{x}'}{V_m^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

dove la quantità $\left(\mathbf{x} - V \cdot t'\right)$ rappresenta **la distanza del punto da rilevare dall'osservatore mobile**, misurata nel riferimento mobile.

44x

Rispetto a questa trasformazione, la quantità $\left(\mathbf{x} - V_{\mathbf{m}} \cdot t\right)$ risulta invariante rispetto al sistema di riferimento senza dover ricorrere all'artificioso fattore γ.
Applicando la trasformazione, si ha infatti :

$$\mathbf{x}' - V_{\mathbf{m}} \cdot t' = \left(\mathbf{x} - V \cdot t'\right) - V_{\mathbf{m}} \cdot \left(t - \frac{V \cdot \mathbf{x}'}{V_{\mathbf{m}}^{2}} \right) =$$

$$= \left(\mathbf{x} - V \cdot t'\right) - V_{\mathbf{m}} \cdot \left(t - \frac{V}{V_{\mathbf{m}}} \cdot t' \right) = \mathbf{x} - V_{\mathbf{m}} \cdot t$$

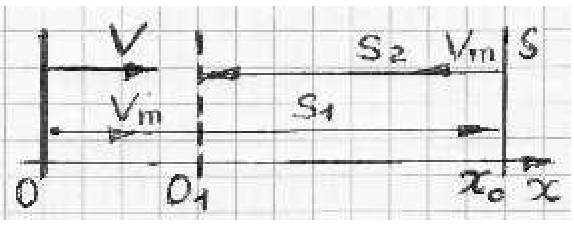
che equivale alla :

$$\frac{\mathbf{x}}{t} = \frac{\mathbf{x}'}{t'} = V_{\mathbf{m}} = \textbf{costante}$$

Questa relazione normalmente viene interpretata come **invarianza assoluta della velocità del segnale rispetto** alla sorgente e all'osservatore.
In realtà il segnale, di qualunque tipo, dopo l'emissione è indipendente dalla sorgente e dunque si muove nel mezzo senza alcuna sua influenza. In queste condizioni il segnale continua il suo moto alla velocità $V_{\mathbf{m}}$ fino a raggiungere il punto da rilevare.
L'unico modo per far variare la velocità di accostamento del segnale al punto è quello di far muovere il mezzo contemporaneamente al segnale.

Va precisato che per misurare la velocità di un segnale, l'osservatore mobile oppure immobile, invia un segnale su una superficie riflettente, posta ad una distanza **x** nota, e rileva il tempo da esso impiegato per realizzare il percorso di andata e ritorno.

Dalla relazione $\frac{L}{t} = V_{\mathbf{m}}$ **ricava il valore medio della velocità sull'intero percorso**.



44y

Consideriamo un osservatore in moto, come in figura.
Dopo l'emissione il segnale $\mathbf{s_1}$, indipendente dalla sorgente,si muove verso la superficie riflettente S con la velocità V_m , percorrendo la distanza $\mathbf{x_1 = x_0}$ in un tempo $t_1 = \dfrac{x_1}{V_m}$.

Dopo il tempo t_1 il segnale viene riflesso e , indipendente dalla superficie S, si muove verso O con la velocità V_m e lo intercetterà nel punto O_1, dopo un tempo t_2 dall'istante in cui è stato riflesso.

Il percorso del segnale riflesso sarà : $x_2 = x_0 - V(t_1 + t_2)$

il tempo di transito del segnale riflesso $\mathbf{s_2}$ risulta :

$$t_2 = \frac{x_2}{V_m} = \frac{x - V(t_1 + t_2)}{V_m} = t_1 - \frac{V}{V_m} \cdot t_1 - \frac{V}{V_m} \cdot t_2$$

da cui si ottiene : $$t_2 = t_1 \cdot \frac{V_m - V}{V_m + V}$$

Il tempo totale, **misurato dall'osservatore**, impiegato dal segnale per tutto il percorso di andata e ritorno sarà :

$$t_O = t_1 + t_2 = t_1 \cdot \frac{2 \cdot V_m}{V_m + V}$$

Il percorso complessivo di andata e ritorno vale :

$$x_O = x_0 + (x_0 - V \cdot t_O) = 2 \cdot x_0 \cdot \frac{V_m}{V_m + V}$$

La velocità osservata risulta : $$V_O = \frac{x_O}{t} = V_m$$

Da tale relazione, se è nota V_m , si ricava la distanza $\mathbf{x_O}$ o viceversa.
Il valore della velocità V_m così calcolata rappresenta il valore medio su tutto il percorso $\mathbf{x_O}$.

44z

Se si desidera conoscere "**la velocità istantanea**" del segnale rispetto allo osservatore, è necessario valutarla entro un piccolo spazio in corrispondenza del punto in cui il segnale viene intercettato dall'osservatore.

I processi che si verificano sono stati analizzati studiando l'effetto Doppler ed abbiamo visto che:

Il segnale emesso con frequenza f_0, **viene intercettato dall'osservatore**, **in moto verso il segnale**, **con frequenza maggiore**, **data da** :

$$f_O = f_0 \cdot \left(1 + \frac{V}{V_m} \right) = \frac{f_0}{V_m} \cdot \left(V + V_m \right) = \frac{V + V_m}{\lambda_0}$$

La velocità istantanea del segnale, rispetto all'osservatore mobile, nell'istante in cui lo raggiunge per essere assorbito oppure riflesso, vale dunque :

$$V_s = \frac{\lambda_0}{T_O} = \lambda_0 \cdot f_O = \left(V + V_m \right)$$

E' da notare che il segnale, che si propaga attraverso il mezzo, durante il moto conserva invariate le sue caratteristiche e " **l'aumento della frequenza che registra l'osservatore si verifica nel momento in cui avviene** l'impatto **fra il segnale e l'osservatore** ".

Ricordando che all'aumento di frequenza è associato un aumento di energia trasferita, espressa da una relazione del tipo $E_s = \alpha \cdot f_O$, essendo l'unica grandezza in gioco "**la velocità d'impatto**", **tale aumento può solo essere dovuto ad un aumento della velocità relativa tra segnale e osservatore** che non potrebbe realizzarsi se venisse applicato il postulato di Einstein sulla velocità della luce.

In definitiva, **l'aumento di energia del segnale**, **dovuto all'effetto Doppler**, **risulta in contraddizione con la costanza della velocità della luce**.

44z1