Cap.14 – Energia di legame e massa atomica

– energia associata ad ogni livello nucleare

In assenza di una teoria, " **il modello atomico che abbiamo proposto non rappresenta quello definitivo** ", ma un primo passo per iniziare, anche con qualche imprecisione, ad interpretare i fenomeni atomici macroscopici.

Utilizzando il modello di prima approssimazione e le relazioni che sono state proposte, vogliamo ricavare ora le caratteristiche più importanti degli atomi, mettendo anche in evidenza **le ragioni per le quali essi diventano instabili oltre un certo valore massimo di Z , mentre risultano particolarmente stabili quelli per i quali Z e/o N e/o A assumono particolari valori**, che vengono, proprio per questo motivo, detti numeri magici.

Per semplificare il linguaggio che useremo per la nostra analisi, conveniamo di dividere il nucleo in due parti :

– Il **nucleo interno**, caratterizzato dal numero di neutroni N, che definisce le caratteristiche degli **elementi nucleari** (isotoni).

– Il **nucleo esterno**, caratterizzato dal numero di protoni in orbita Z, il quale definisce invece le caratteristiche degli **elementi atomici** (isotopi).

Per poter studiare e comprendere il comportamento dei nuclei atomici, è di fondamentale importanza la determinazione di una relazione che consenta il calcolo teorico dell'energia di legame tra i suoi componenti, la quale attualmente è ottenuta con delle formule semiempiriche, che sono state ricavate utilizzando sostanzialmente alcune analogie con processi ordinari.

Le relazioni che così si sono rese disponibili consentono inoltre di calcolare solo il valore medio dell'energia di legame per ogni **nucleone** senza alcuna distinzione tra protoni e neutroni e del tutto trascurata è la posizione che essi occupano all'interno del nucleo.

E' chiaro che quelli citati costituiscono dei grossi limiti, in quanto ci troviamo costretti a studiare gli **elementi nucleari** nelle condizioni in cui ci troveremmo con gli **elementi atomici** se, invece del valore dell'energia di legame che il nucleo associa ai singoli elettroni sulle diverse orbite, fosse conosciuto solo il valore medio della energia associata ad una qualsiasi particella costituente l'atomo, senza precisare se protone oppure elettrone.

Scopo di questo capitolo è proprio quello di ricavare teoricamente il valore della energia di legame associata a ciascun componente dell'atomo in rapporto all'orbita percorsa e, ancora più in generale, alla posizione occupata.

Se lo spazio fisico in cui si genera lo spazio rotante è omogeneo, indicando con δ_l la sua densità lineare, la massa associata ad una intera orbita avente raggio R_p vale :

$$m_p = \delta_l \cdot 2 \cdot \pi \cdot R_p.$$

Le **equazioni fondamentali** che descrivono il comportamento di uno spazio rotante :

$$V_p^2 \cdot R_p = K^2 = \textbf{costante} \quad ; \quad R_p = R_1 \cdot p^2$$

si possono scrivere nella forma :

$$V_p^2 \cdot \frac{m_p}{2 \cdot \pi \cdot \delta_l} = \frac{1}{\pi \cdot \delta_l} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_p \cdot V_p^2 =$$

$$= \frac{1}{\pi \cdot \delta_l} \cdot E_p = K^2 = \textbf{costante}$$

dove con m_p abbiamo indicato la massa globalmente presente su un'intera orbita e quindi E_p rappresenta l'energia cinetica che la sfera rotante centrale trasferisce a tutta l'orbita, attraverso lo spazio rotante generato.
Si ricava dunque :

$$E_p = \pi \cdot \delta_l \cdot K^2$$

Questa relazione esprime una importante caratteristica di tutti gli spazi rotanti.

Se si ha uno spazio fisico omogeneo, con $\delta_l =$ **costante**, essa ci consente di dare il seguente enunciato, fondamentale per tutta la teoria.

L'energia potenziale che uno spazio rotante trasferisce a ciascuna orbita è una costante, **indipendente dall'orbita** che viene considerata, ed è legata unicamente alla sfera centrale generatrice.

Trattando la teoria generale, abbiamo visto che negli spazi rotanti con masse planetarie in orbita tutte uguali tra loro, la condizione di equilibrio **si realizza saturando le orbite con un numero di sfere planetarie dato da** :

$$N_m = 2 \cdot p^2$$

Se m_1 indica la massa inerziale di ciascuna sfera planetaria presente sulla orbita associata al numero quantico p, la massa che complessivamente è presente sull'orbita sarà :

$$m_p = m_1 \cdot 2 \cdot p^2$$

la densità lineare δ_l dello spazio risulta dunque :

$$\delta_l = \frac{m_p}{2 \cdot \pi \cdot R_p} = \frac{m_1 \cdot 2 \cdot p^2}{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot p^2} = \frac{m_1}{\pi \cdot R_1} = \textbf{costante}$$

il valore dell'energia potenziale **associata all'intera orbita** dal nucleo risulta dunque :

$$E_p = \pi \cdot \delta_l \cdot K^2 = \frac{m_1}{R_1} \cdot K^2 = \textbf{costante}$$

Se si tiene conto che a questa categoria di spazi rotanti appartengono anche

quello atomico e nucleare, risulta chiara la straordinaria importanza di questa relazione.
Scritta nella forma :

$$E_p = \frac{K^2}{R_1} \cdot m_1 = E_1 = \textbf{costante}$$

essa mette infatti in evidenza che in questi spazi rotanti l'energia associata ai diversi strati è indipendente dallo strato considerato e coincide con l'energia potenziale "**gravitazionale**" associata ad una sola massa planetaria in moto sull'orbita fondamentale, corrispondente a $p = \mathbf{1}$.

Per esempio, nell'atomo di idrogeno, considerando il protone fermo al centro, l'energia E_p associata all'orbita fondamentale (saturabile teoricamente con due elettroni) risulta :

$$E_0(Z=1) = \frac{K_p^2}{R_{11e}} \cdot m_e = \frac{253{,}2638995 \ \frac{m^3}{sec^2}}{5{,}29177249 \cdot 10^{-11} \ m} \cdot 9{,}1093897 \cdot 10^{-31} \ K_g =$$

$$= \mathbf{27{,}21139612} \ eV$$

L'energia di legame dell'unico elettrone presente sull'orbita ($p = \mathbf{1}$) sarà :

$$E_{11e} = \frac{E_0(Z=1)}{\mathbf{2} \cdot p^2} = \frac{\mathbf{27{,}21139612} \ eV}{\mathbf{2 \cdot 1^2}} = \mathbf{13{,}60568306} \ eV$$

Se si considera lo spostamento del centro di massa dell'atomo, è possibile apportare la piccola correzione :

$$E_e = E_{11e} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{m_e}}{\mathbf{m_p}}\right)} = \mathbf{13{,}59827721} \ eV$$

e si ottiene un valore **coincidente** esattamente con l'energia di legame dello elettrone in orbita nell'atomo di idrogeno, ricavato sperimentalmente.

D'ora in poi, per questi spazi rotanti, parleremo di "energia per strato" senza ulteriori precisazioni.

E' chiaro che E_p indica anche il valore massimo dell'energia che lo spazio rotante può trasferire complessivamente alle masse presenti sull'orbita.

Dato che la velocità orbitale è definita solo dalle caratteristiche della sfera centrale, di fatto l'energia E_p definisce anche il valore massimo della massa che complessivamente può muoversi sull'orbita.

Queste limitazioni hanno carattere generale e dunque saranno certamente, presenti anche negli spazi rotanti astronomici.

In questo caso diventa però difficile verificarle, in quanto le masse che si muovono sulle orbite sono molto diverse tra loro.

Molto più facile risulta invece la verifica negli spazi rotanti atomici e nucleari, nei quali, con ottima approssimazione, abbiamo masse tutte uguali tra loro e uniformemente distribuite sull'orbita, per cui risulta :

$$\delta_l = \frac{\sum m}{2 \cdot \pi \cdot R_p} = \frac{2 \cdot p^2 \cdot m_1}{2 \cdot \pi \cdot R_1 \cdot p^2} = \frac{m_1}{\pi \cdot R_1} = \textbf{costante}$$

Eliminando l'indice p, ormai inutile, l'energia per strato E_0 associata ad una orbita, nei due atomi, **interno ed esterno**, si può scrivere :

$$E_{0P}(N) = \frac{m_p^*}{R_{1P}(N)} \cdot K^2\,(N)$$

$$E_{0e}(Z) = \frac{m_e}{R_{1e}(Z)} \cdot K^2\,(Z)$$

614

Se consideriamo l'aggregato atomico più semplice, con : $N = Z = 1$, ricordando che :

$$m_p^* = \frac{3}{4} \cdot m_p \quad ; \quad K^2 (N = 1) = \frac{K_p^2}{2} \quad ; \quad K^2 (Z = 1) = K_p^2$$

$$R_{1P}(N = 1) = R_{11P} \quad ; \quad R_{1e}(Z = 1) = R_{11e}$$

si ottiene :

$$E_{0P}(1 \, ; 1) = \frac{m_p^*}{R_{1P}(N = 1)} \cdot K^2 (N = 1) =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{m_p}{R_{11P}} \cdot \frac{K_p^2}{2} = 17,201634 \text{ MeV}$$

L'energia che lega un solo protone nucleare sarà dunque :

$$E_{11P} = \frac{1}{2} \cdot E_{0P}(1 \, ; 1) = 8,600817 \text{ MeV} \ (\text{con neutrone fermo al centro})$$

Per la fascia elettronica, periferica, si ha :

$$E_{0e}(1 \, ; 1) = \frac{m_e}{R_{1e}(Z = 1)} \cdot K^2 (Z = 1) =$$

$$= \frac{m_e}{R_{11e}} \cdot K_p^2 = 27,211396 \text{ eV}$$

L'energia che lega al nucleo un solo elettrone, in questo caso, vale :

$$E_{11e} = \frac{1}{2} \cdot E_{0e}(1 \, ; 1) = 13,605698 \text{ eV}$$

Si ha dunque il rapporto :

$$\frac{E_{0P}}{E_{0e}} = \frac{E_{11P}}{E_{11e}} = \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{m_P}{m_e} \right)^2$$

Facciamo osservare che finora abbiamo sempre considerato il centro dello spazio rotante coincidente con il centro di rotazione.

Questa condizione è però verificata, con buona approssimazione, solo se è possibile trascurare il valore della massa satellite rispetto a quella del nucleo centrale, che genera lo spazio rotante.

Se si considera lo spostamento del centro di massa, nell'atomo di idrogeno, si ottiene :

$$E_{1eH} = E_{11e} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{m_e}{m_p} \right)} = 13,598292 \text{ eV}$$

che coincide esattamente con l'energia di estrazione dell'elettrone orbitante, nell'atomo di idrogeno, che si ricava sperimentalmente.

E' ancora da notare che E_0 rappresenta l'energia cinetica dello spazio fisico che si muove solidale con l'orbita.

Essa viene trasferita ad una particella solo quando realmente questa è presente sull'orbita, altrimenti rimane associata allo spazio rotante come valore massimo di energia potenzialmente trasferibile.

E' facile immaginare che il valore di energia trasferibile diminuisce man mano che parte di essa viene utilizzata.

Per maggiore chiarezza del discorso, consideriamo come esempio numerico l'atomo di ossigeno, avente $N = Z = 8$.