– espressione teorica energia di legame del nucleo atomico

Per semplicità, sopponiamo di poter trascurare la riduzione del valore dello spazio rotante dovuta all'energia impegnata sottoforma di energia di legame ed anticipiamo il risultato che ricaveremo in seguito :

$$R_{1P}(8) = R_{11P} \cdot \mathbf{8}^{\frac{1}{3}} = 57,63978486 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m} \cdot \mathbf{8}^{\frac{1}{3}} = 115,2795696 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

$$R_{1e}(8) = R_{11e} \cdot \mathbf{8}^{\frac{1}{3}} = 5,29177249 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} \cdot \mathbf{8}^{\frac{1}{3}} = 10,58354497 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}$$

i valori dello spazio rotante risultano :

$$K^2\,(N = 8) = \frac{K_p^2}{\mathbf{2}} \cdot N = \frac{253,2638995\ \frac{m^3}{sec^2}}{2} \cdot 8 = 1013,055598\ \frac{m^3}{sec^2}$$

$$K^2\,(Z = 8) = K_p^2 \cdot Z = 253,2638995\ \frac{m^3}{sec^2} \cdot 8 = 2026,111196\ \frac{m^3}{sec^2}$$

Si ricavano dunque i valori dell'energia per strato :

$$E_{0P}(N = 8) = \frac{K^2\,(N = 8)}{R_{1P}(8)} \cdot m_p^* = \mathbf{68,80654}\ \mathrm{MeV}$$

$$E_{0e}(Z = 8) = \frac{K^2\,(Z = 8)}{R_{1e}(8)} \cdot m_e = \mathbf{108,84558}\ \mathrm{eV}$$

Per tener conto di alcune approssimazioni di calcolo, il valore riferito al nucleo deve essere moltiplicato per un fattore correttivo, per cui si considera :

$$E_{0P}(N = 8) = \frac{\mathbf{17,828}\ \mathrm{MeV}}{\mathbf{17,2016}\ \mathrm{MeV}} \cdot \mathbf{68,80654}\ \mathrm{MeV} = \mathbf{71,31215}\ \mathrm{MeV}$$

Dallo schema orbitale si vede che la prima orbita è completa con due protoni, quindi, **su questa orbita**, **la** E_0 **viene interamente convertita in energia di legame**.

Sulla seconda orbita, associata al numero quantico $p = 2$, il numero massimo di protoni che possono orbitare vale :

$$N_2 = 2 \cdot p^2 = 8$$

mentre invece nell'atomo ne troviamo realmente solo sei.
Dunque, **su questa orbita l'energia di legame utilizzata sarà** :

$$E_2 = E_0 \cdot \frac{6}{8}$$

L'energia di legame complessiva risulta quindi :

$$E_{ZNP} = E_{0P} + E_{0P} \cdot \frac{6}{8} = E_{0P} \cdot \left(1 + \frac{6}{8} \right) = 124,7963 \text{ MeV}$$

$$E_{ZNe} = E_{0e} + E_{0e} \cdot \frac{6}{8} = E_{0e} \cdot \left(1 + \frac{6}{8} \right) = 190,4798 \text{ eV}$$

per tutto l'atomo, lenergia di legame vale dunque :

$$E_{ZN}(8\,;8) = E_{ZNP} + E_{ZNe} = 124,9868 \text{ MeV}$$

Una verifica può essere fatta calcolando l'energia di estrazione dell'elettrone dall'orbita periferica.

Sapendo che l'energia associata a tutta l'orbita vale E_{0e} e che il numero di elettroni che satura l'orbita vale **8** , si ottiene l'energia assegnata a ciascun eletrone presente sull'orbita :

$$E_{1PSe} = \frac{E_{0e}}{8} = 13,6057 \text{ eV}$$

618

praticamente coincidente con il valore ottenuto sperimentalmente. In questo caso, per simmetria, il nucleo centrale è fermo e non serve alcuna correzione.

Scriviamo ora l'energia cinetica della generica massa planetaria del modello atomico che abbiamo proposto, **facendo riferimento all'atomo interno**.

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot m_p \right) \cdot V^2_{ZPP} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot m_p \right) \cdot \frac{V^2_{11P}}{2} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{p^2}$$

moltiplicando questo valore per il numero massimo di unità che si possono trovare sull'orbita, $N_p = 2 \cdot p^2$, si ottiene il valore dell'energia E_0 associata ad una intera orbita :

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot m_p \right) \cdot V^2_{11P} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon}} = 2 \cdot E^*_{11} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon}}$$

che risulta indipendente dall'orbita considerata.

Questo conferma la regola generale secondo la quale il nucleo centrale crea uno spazio rotante che associa a tutte le orbite lo stesso valore di energia.

In quest'ultima relazione, la E^*_{11} indica l'energia che viene associata all'orbita dal nucleo formato da un unico neutrone centrale ed un solo protone in orbita.

Se indichiamo con p_S il numero totale delle orbite che vengono occupate nel nucleo considerato e con n_p il numero dei protoni presenti sull'ultima orbita, l'energia di legame dell'ultimo protone aggiunto, e quindi il meno legato al nucleo centrale (**e naturalmente di tutti quelli che**

si trovano sulla stessa orbita associata al numero quantico $p = p_s$)
sarà espressa dalla relazione :

$$E_{1Ps} = \frac{E_0}{2 \cdot p_s^2} = 2 \cdot E_{11}^{*} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{2 \cdot p_s^2}$$

Tenendo conto che le orbite certamente complete sono $\left(p_s - 1\right)$, l'energia di legame di tutto l'atomo interno risulta :

$$E_{ZN}(Z\,;N) = E_0 \cdot \left[\left(p_s - 1\right) + \frac{n_p}{2 \cdot p_s^2} \right] =$$

$$= 2 \cdot E_{11}^{*} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon}} \cdot \left[\left(p_s - 1\right) + \frac{n_p}{2 \cdot p_s^2} \right]$$

A questo punto dobbiamo ricordare che finora tutte le relazioni, dunque anche quella dell'energia E_{ZN} , sono state ricavate considerando il nucleo compatto di neutroni "**fermo**" al centro e le sfere planetarie orbitanti in numero sempre pari sulle orbite.

Tutto ciò per avere, in ogni momento, il centro di massa coincidente con quello del nucleo, il quale non risulta così soggetto a moti diversi da quello di rotazione su se stesso.

Dunque, **con queste ipotesi** (**N e Z pari**), **ponendo** $N = 1$ **e** $Z = 1$ **nelle espressioni di** $E_{ZN}(Z\,;N)$, **si deve ottenere il valore dell'** energia di legame E_{11}^{*} associata al deutone nelle stesse condizioni di simmetria, **ossia con il nucleo fermo al centro e sfere planetarie in numero rigorosamente pari in orbita** .

Per determinare il valore dell'energia E^*_{11} (che comunque è stato già ricavato per altra via) dobbiamo quindi riprendere il processo di sintesi del deutone e riconsiderare il sistema simmetrico intermedio che viene sintetizzato, senza altre schematizzazioni o semplificazioni, in quanto con i passaggi successivi, nei quali viene considerato il deutone formato dalle due particelle distinte, il neutrone ed il protone, si perde la simmetria dell' aggregato e quindi il nostro calcolo dovrebbe essere modificato per poter essere utilizzato.

Ricordiamo dunque che, applicando le forze esterne, il sistema compresso **protone – elettrone – protone** aveva raggiunto una condizione di equilibrio stabile attraverso la formazione di **uno spazio rotante centrale**, **generato da un elettrone modificato**

avente valore uguale a : $\left(-\dfrac{K_p^2}{2} \right)$

con due unità in moto sulla stessa orbita, **in posizioni diametralmente opposte**

aventi una massa pari a : $m^*_p = \left(\dfrac{3}{4} \cdot m_p \right)$

con spazio rotante associato uguale a $\left(+\dfrac{3}{4} \cdot K_p^2 \right)$.

Questo sistema soddisfa la necessaria condizione di simmetria e quindi, per l'energia cinetica, possiamo scrivere :

$$E^*_{11} = \frac{1}{2} \cdot E_0(1) = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot m_p \right) \cdot V^2_{11P} \right] =$$

$$= \frac{17{,}2016\ \text{MeV}}{2} = 8{,}6008\ \text{MeV}$$

Come è già stato ricordato, **il valore** E^*_{11}, **che otteniamo ponendo**, **nella espressione di** E_{ZN} , $N = Z = 1$, **rappresenta il valore dell'energia di legame del deutone vincolato nel nucleo**.

Per il deutone libero, fuori dal nucleo, considerato formato solo da un protone ed un neutrone legati tra loro senza altre particelle, la situazione si presenta completamente diversa.

In questo caso, non esistono più le condizioni di simmetria e questo provoca un non trascurabile spostamento del centro di massa del sistema rispetto al centro dello spazio rotante con conseguente riduzione del valore dell'energia che il nucleo riesce a trasferire allo spazio circostante.

Per semplificare il discorso, in prima approssimazione, possiamo assumere per protone e neutrone la stessa massa.

Se consideriamo che siano nulle le forze esterne applicate al sistema, quindi il neutrone non vincolato a restare fermo al centro, in un deutone libero, le due particelle ruotano entrambe attorno al comune centro di massa che, in prima approssimazione, si trova equidistante dal centro delle due sfere.

In queste condizioni, esse percorrono quindi un'orbita con il valore del raggio

dato da : $$R = \frac{R_{11P}}{2}$$

con una uguale velocità di rivoluzione che vale : $$V_P = V_N = \frac{V_{11P}}{2} .$$

Notiamo che la velocità relativa tra protone e neutrone vale ancora $\mathbf{V_{11P}}$.

Nel deutone libero, privo di vincoli, l'energia E che viene fornita al sistema si distribuisce dunque equamente tra neutrone e protone, per cui a quest'ultimo viene fornita una energia data da :

$$E_p = E_N = \frac{1}{2} \cdot E .$$

Il rapporto tra il valore dell'energia E_p che viene trasferita al protone in queste condizioni (**deutone con il nucleo non vincolato a restare fermo nel centro di rotazione**) **e quello che abbiamo determinato prima** E^*_{11}, **prendendo in considerazione il sistema con neutrone fermo al centro**, **vale** :

622

$$\frac{E_p}{E_{11}^*} = \left(\frac{V_p}{V_{11P}} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

Per il deutone libero, **si ha quindi teoricamente** :

$$E_p = \frac{1}{4} \cdot E_{11}^* = \frac{17,2016 \text{ MeV}}{8} = 2,1502 \text{ MeV.}$$

Tale risultato è in ottimo accordo con quello che si ricava sperimentalmente, per il deutone, $E_p = 2,224$ MeV.

Possiamo utilizzare questo valore per eliminare le approssimazioni di calcolo che sono state introdotte e considerare quindi il valore teorico dell'energia di legame " adattato " :

$$E_{11} = 8 \cdot 2{,}224 \text{ MeV} = \mathbf{17,792} \text{ MeV}$$

Per ricavare le espressioni teoriche che caratterizzano il nucleo atomico, abbiamo posto :

$$K_Z^2 = Z \cdot K_p^2.$$

Così facondo abbiamo trascurato quella parte di K_p^2 che non è più disponibile per generare spazio rotante, in quanto si è trasformata in energia di legame tra i diversi componenti del nucleo oppure che è stata trattenuta dalla sfera, generatrice dello spazio rotante, sottoforma di energia cinetica di rotazione.

Nel nucleo si possono infatti avere oscillazioni dovute alle dissimmetrie nella distribuzione delle masse sulle orbite.

Differenziando l'espressione della massa trasversale, abbiamo infatti ricavato la relazione :

$$d\left(K^2\right) = \beta_e \cdot dm = \frac{\beta_e}{C_l^2} \cdot dE$$

623

L'energia associata a tutta la massa m_0 risulta dunque $E_0 = C_l^2 \cdot m_0$.

Quella che la particella spende per portarsi sull'orbita, arrivando dall'esterno dello spazio rotante, vale :

$$\Delta E = m_0 \cdot V_{ZPP}^2$$

Trascurando per adesso eventuali dissimmetrie del nucleo, l'energia residua, **disponibile per incrementare lo spazio** rotante vale :

$$E* = E_0 - \Delta E = m_0 \cdot \left(C_l^2 - V_{ZPP}^2\right)$$

Secondo tale relazione, quando si verifica la condizione limite $V_{ZPP} = C_l$ si ottiene $E* = 0$ e quindi l'ultima particella aggiunta non riesce più a fornire alcun contributo allo spazio rotante.

Dunque, superato questo limite, lo spazio rotante nucleare non potrà più aumentare in quanto **non esiste** più alcuna disponibilità di energia per legare altre particelle.

Il sistema che così sì ottiene, si comporta, a questo punto, come una particella elementare che non può più nè ricevere nè emettere nulla.

Il discorso si potrà applicare a tutti gli spazi rotanti, indipendentemente dalle dimensioni, e dunque sarà valido anche a livello astronomico.

Con riferimento al nucleo atomico, **questo vuol dire che il numero dei protoni Z raggiunge un valore limite Z_l oltre il quale non sarebbe più possibile la sintesi di altri elementi nucleari**.

Dato che la massima velocità orbitale viene raggiunta sulla prima orbita, per ottenere il valore massimo Z_l , sarà sufficiente sostituire la velocità della luce nella espressione di V_{ZPP} ponendo $p = 1$.

Bisogna considerare che Z_l rappresenta il valore limite reale, dunque attuale, quindi quello attivo che realmente contribuisce a generare lo spazio rotante.

624

Per poter procedere realmente al calcolo, si deve quindi tener conto del fatto che "**il protone legato presenta un difetto di massa**" rispetto al valore che essa assume quando la particella è a riposo.

Indicando con m_u l'unità di massa atomica e con Δm il difetto di massa, per il valore attuale dello spazio rotante si avrà infatti :

$$K_Z^2 = Z \cdot K_p^2 - \Delta\left(K^2\right) =$$

$$= Z \cdot K_p^2 - \Delta m \cdot \frac{m_u}{m_p} \cdot K_p^2 = K_p^2 \cdot \left(Z - \Delta Z\right)$$

si deve quindi considerare : $\Delta Z = \dfrac{m_u}{m_p} \cdot \Delta m$

e nelle relazioni si deve assumere dunque :

$$Z^* = Z - \Delta Z .$$

Per poter procedere realmente al calcolo, il primo problema che dobbiamo risolvere è definire il valore dell'esponente ε che compare in tutte le relazioni riguardanti il nucleo e che, in prima approssimazione, abbiamo assunto, con valore massimo uguale a $\dfrac{1}{3}$.

Esso dipende in realtà dal numero di neutroni N, e dal valore Δm del difetto di massa.
Si dovrà dunque ricavare sperimentalmente, utilizzando dati noti, oppure con successive approssimazioni utilizzando il valore teorico del difetto di massa.

Essendo conosciuto l'andamento qualitativo del difetto di massa, per uno studio di prima approssimazione, è possibile utilizzare quattro elementi noti, distribuiti nell'intervallo $10 \leq Z \leq 92$, in modo da ottenere, per ogni valore di Z, un valore medio ε_{Z0} dell'esponente associato all'isotopo avente il numero medio N_0 di neutroni e, naturalmente, Z protoni.

Se prendiamo in considerazione i nuclei aventi $Z =$ **13** - **25** - **54** - **92**
si ricavano le espressioni :

$$\varepsilon_{Z0} = 0,335541 - 316,145 \cdot 10^{-5} \cdot Z + 574,82 \cdot 10^{-7} \cdot Z^2 - 318,094 \cdot 10^{-9} \cdot Z^3$$

$$N_0 = \frac{Z}{1,040187 - 966,529 \cdot 10^{-5} \cdot Z + 874,288 \cdot 10^{-7} \cdot Z^2 - 337,878 \cdot 10^{-9} \cdot Z^3}$$

Per ogni valore di Z la prima relazione fornisce il valore dell'esponente ε_{Z0} e la seconda il valore di N_0 al quale viene riferito, approssimando il risultato con il numero intero più prossimo.

La seconda relazione può essere sostituita con una delle tante disponibili per il calcolo del numero isotopico, per esempio :

$$N_0 = Z + \left(\frac{Z}{8} - 1 \right)^{1,7}$$

Per l'isotopo che ha lo stesso valore di Z, ma un numero di neutroni $N \neq N_0$ si avrà, con buona approssimazione :

$$\varepsilon_Z = \frac{N_0}{N} \cdot \varepsilon_{Z0} \,.$$

Utilizzando il valore dell'esponente ε_Z così calcolato, si ricava l'energia che la sfera rotante centrale trasferisce ad uno strato completo di spazio rotante, con la relazione :

$$E_0 = 17,792 \text{ MeV} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon_z}}$$

626

Anche se la relazione è solo una prima approssimazione, quindi non fornisce risultati rigorosi, eseguendo il calcolo per tutti i nuclei conosciuti, risulta molto chiara la conferma della previsione teorica, secondo la quale : **l'energia per strato E_0 non dipende affatto dall'elemento considerato (e dunque da Z), ma solo ed esclusivamente dal numero di neutroni N , che si trovano al centro del nucleo.**

Questo risultato è di straordinaria importanza, in quanto consente di dire che: **il valore dell'energia per strato E_0, dunque anche tutte caratteristiche dello spazio rotante nucleare, non vengono influenzati dal numero dei protoni presenti in orbita nella parte " penetrabile " del nucleo.**

Esse rappresentano quindi caratteristiche associate al nucleo centrale formato da N neutroni aggregati in una sfera " impenetrabile ".

La situazione è identica a quella che si manifesta alla periferia dell'atomo (e viene descritta da relazioni analoghe), dove l'energia potenziale che la sfera generatrice trasferisce alle orbite elettroniche dipende solo dal numero dei protoni "centrali" e non viene influenzata in maniera apprezzabile dal numero di elettroni in orbita.

Se prendiamo in considerazione alcuni elementi di cui sia ben nota l'energia di legame E_{ZN}, utilizzando la relazione :

$$E_{ZN} = E_0(N) \cdot \left[\left(p_s - 1\right) + \frac{n_p}{2 \cdot p_s^2} \right]$$

possiamo calcolare l'energia potenziale per orbita $E_0(N)$ che si associa allo spazio rotante di qualsiasi nucleo formato da N neutroni.

Nella realtà, per ragioni che vedremo, nell'atomo interno, in corrispondenza di precisi valori di N e Z , si verificano cambiamenti improvvisi che rendono le caratteristiche molto irregolari, per cui, esprimere $E_0(N)$ utilizzando una sola espressione diventa piuttosto complesso e di scarsa utilità, visto che, si dovrà comunque procedere alla ricerca di relazioni più precise.

627

E' certamente più conveniente dividere il campo di applicazione in due o più intervalli, nei quali la $E_0(N)$ può essere espressa con relazioni approssimate più semplici.

Inoltre, il passaggio da N pari a N dispari comporta un salto non trascurabile dell'energia di legame, per cui, in un discorso rigoroso bisognerebbe poter considerare i due casi separatamente.

Per i nostri scopi però ricaviamo l'espressione di $E_0(N)$ solo per N pari.

Considerando gli elementi naturali aventi : $N = \mathbf{16 - 24 - 42 - 56 - 74}$
si ricava la relazione :

$$E_0(N) = \mathbf{16{,}797105} + \mathbf{8{,}160267 \cdot N} - \mathbf{0{,}1562584 \cdot N^2} + \\ + \mathbf{215{,}4993 \cdot 10^{-5} \cdot N^3} - \mathbf{118{,}2499 \cdot 10^{-7} \cdot N^4} \qquad \text{per} \quad 16 < N \leq 66$$

Considerando invece : $N = \mathbf{56–78–100–126–146}$
si ottiene :

$$E_0(N) = -\mathbf{62{,}1106637} + \mathbf{10{,}514719 \cdot N} - \mathbf{0{,}13192608 \cdot N^2} + \\ + \mathbf{882{,}57659 \cdot 10^{-6} \cdot N^3} - \mathbf{224{,}55528 \cdot 10^{-8} \cdot N^4} \quad \text{per} \quad 66 < N \leq 146$$

Considerando $N = Z$ ed adattando i primi due valori in modo che si abbia $E_0 = 17{,}792$ MeV per $N = \mathbf{1}$, la prima relazione può essere utilizzata anche per l'intervallo $2 \leq N \leq 14$.

Con $N = Z$ è anche possibile porre $\varepsilon = \dfrac{1}{3}$ nell'espressione di E_0 e si ottiene semplicemente :

$$E_0 = \mathbf{17{,}792} \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

Dato che il nucleo con $Z = \mathbf{2}$ presenta una maggiore simmetria rispetto a quella del deutone, la relazione può essere adattata in modo che, per $Z = \mathbf{2}$, risulti $E_0(2) = \mathbf{28{,}2955}$ MeV . Si ricava così :

628

$$E_0 = 17{,}825 \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

Riportiamo nelle pagine seguenti i valori tabulati che si ricavano applicando queste relazioni.

629