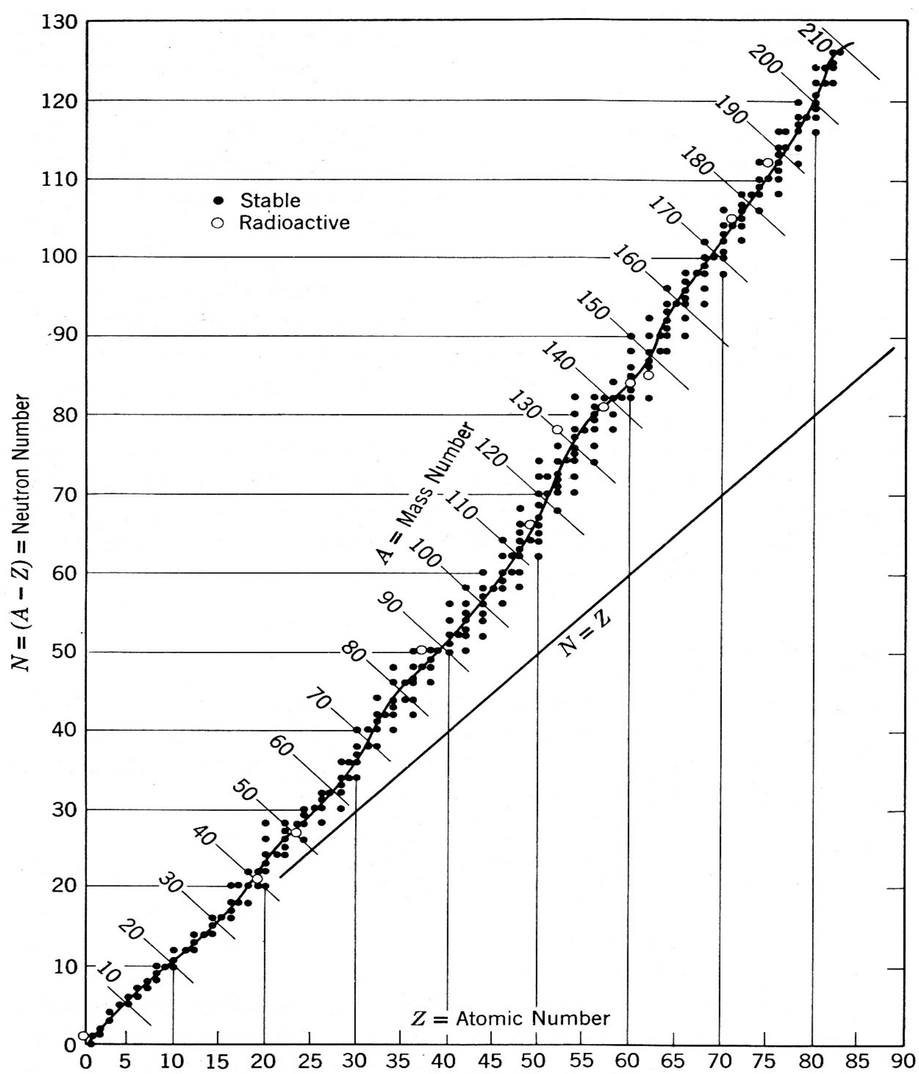
– espressione teorica dell'energia di legame dei nuclei atomici

(seconda approssimazione)

Facciamo rilevare che finora abbiamo sempre affermato che l'energia fornita dal nucleo centrale ad ogni strato, E_0 , negli spazi rotanti, è indipendente dal numero di particelle orbitanti ed è legata unicamente alla massa generatrice.

Questa affermazione risulta però in contraddizione con l'espressione che abbiamo fornito :

$$E_0(N) = \mathbf{17{,}792}\ \text{MeV} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon_Z}}$$



676

Per eliminare questo apparente contrasto, facciamo riferimento alla funzione $N = f(Z)$ ricavata sperimentalmente .

Se si osserva attentamente il diagramma, si vede che esso presenta dei tratti che, **si possono ritenere**, approssimativamente, rettilinei.
La curva potrà quindi essere descritta prendendo in considerazione **diversi livelli di approssimazione**.

Il primo livello di semplificazione si ha assumendo $N = Z$ e dal diagramma risulta che questa condizione è ben verificata per per $1 \leq Z \leq 8$.

In questo intervallo si ha $\varepsilon_Z \simeq \dfrac{1}{3}$

e quindi risulta :

$$E_0(N) = 17{,}792 \text{ MeV} \cdot \frac{Z}{N^{\varepsilon_Z}} \simeq 17{,}792 \text{ MeV} \cdot N^{\frac{2}{3}} .$$

In realtà, nell'intervallo considerato è possibile distinguere i tratti :

$$(1 - 2)\ ;\ (3 - 9)\ ;\ (9 - 19)\ ;\ (19 - 29)\ ;\ (29 - 60)\ ;\ (60 - 125)$$

che però, in questo momento, trascuriamo .

Un'accettabile approssimazione della curva $N = f(Z)$, **riferita all'isotopo stabile medio**, risulta :

$$N = Z + \left(\frac{Z}{8} - 1 \right)^{1{,}7}$$

Se si accetta un errore di qualche unità percentuale, prima di approssimare la curva con gli intervalli rettilinei, facendo riferimento a quattro isotopi noti, è possibile esprimere l'energia per strato E_0 di tutti i nuclei con una semplice relazione, ottenuta con un adattamento minimo, attraverso un piccolo fattore correttivo α . Si ottengono così le relazioni :

677

$$E_0(N) = 17,828\ \text{MeV} \cdot N^{\frac{2}{3}} \cdot (N-1)^{\alpha} - \beta$$

$$\beta = \frac{2,606}{\left[(p_s - 1) + \frac{n_P}{2 \cdot p_s^2} \right] \cdot \log N - 0,2228} \qquad \text{solo per nuclei d–d}$$

$$\alpha = 16,9423 \cdot 10^{-3} - 65,785 \cdot 10^{-5} \cdot N - 3,31954 \cdot 10^{-7} \cdot N^2 +$$

$$+ 35,0126 \cdot 10^{-9} \cdot N^3 - 15,758 \cdot 10^{-11} \cdot N^4$$

la correzione per nuclei d–d risulta significativa solo per bassi valori di N.

I risultati che si ottengono con questa relazione sono riportati a pagina 564, fino al valore massimo $N_{max} = 164$ corrispondente a $Z_{max} = 110$.

Senza fattori correttivi, è comunque significativo il valore che si ricava usando l'energia di ionizzazione dell'idrogeno, secondo la relazione che si ottiene prendendo in considerazione il rapporto tra i valori dell'energia cinetica delle masse in orbita :

$$\frac{E_0(Z)_P}{E_0(Z)_e} = \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot m_p \right) \cdot V_p^2}{m_e \cdot V_e^2}$$

Abbiamo visto che per il nucleo, in condizioni di equilibrio, si ha :

$$K_P^2(Z) = \frac{1}{2} \cdot K_e^2(Z)$$

Sostituendo l'espressione fondamentale : $\quad K^2 = V^2 \cdot R$
con ovvio significato dei simboli, si ottiene :

$$\frac{V_p^2}{V_e^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_{11e}}{R_{11p}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{m_p}{m_e}$$

e quindi, in definitiva :

$$E_0(Z)_P = \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^2 \cdot E_0(Z)_e$$

numericamente :

$$E_0(Z)_P = \frac{3}{16} \cdot \left(\frac{m_p}{m_e} \right)^2 \cdot 27{,}212 \text{ eV} \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

un migliore risultato si ottiene ricordando l'adattamento $\left(\frac{17.828 \text{ MeV}}{17{,}2016 \text{ MeV}} \right)$

Per esempio, per $Z = 20$, si ricava :

$$E_0(20)_P = \frac{3}{16} \cdot (1836{,}15)^2 \cdot \left(\tfrac{17{,}828}{17{,}2016} \right) \cdot 27{,}212 \cdot (20)^{\frac{2}{3}} = \mathbf{131{,}61} \text{ MeV.}$$

I valori dell'energia $E_0(N)$ che si ottiene con l'approssimazione che abbiamo indicato è riportata a pagina 680.