– **Trasformazioni di Galileo e di Lorentz**, **effetti di dilatazione del tempo e contrazione delle lunghezze**, **effetto Doppler relativistico**.

Introducendo la teoria, abbiamo visto che la consapevolezza **dell'esistenza dell'universo come spazio fisico organizzato**, viene acquisita attraverso le diverse configurazioni con le quali esso si presenta, quindi unitamente alla percezione del tempo, che ha consentito d'introdurre il concetto di velocità di un processo, senza il quale nessuna analisi sarebbe stata possibile.

Se si considera attentamente il concetto di velocità, ci si rende subito conto delle notevoli difficoltà che si incontrano a voler passare dal concetto intuitivo alla definizione come grandezza fisica misurabile.
In quest'ultimo caso si richiedono infatti le misurazioni "simultanee" di spazio e tempo.

E' chiaro quindi che qualsiasi sistema di trasformate, impostato per ricavare le relazioni con le quali si potrà descrivere un fenomeno osservato da diversi sistemi di riferimento in moto relativo tra loro, **dovrà necessariamente fare ipotesi implicite o esplicite sui problemi fondamentali che riguardano la natura dello spazio e del tempo**.

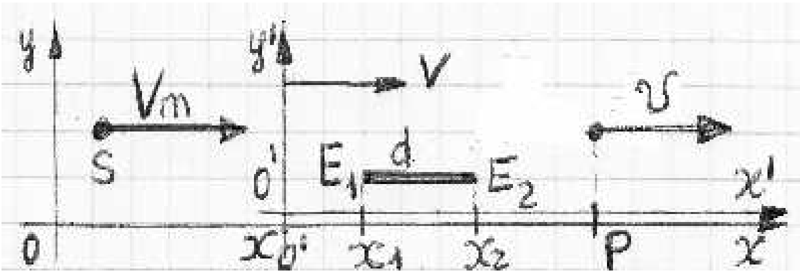
Dato che le misurazioni di tempo e spazio si dovranno realizzare certamente con orologi e regoli materiali, il primo problema che si deve risolvere è quello di definire il comportamento di questi strumenti con il movimento, in modo da fornire risultati coerenti con le osservazioni sperimentali.

Per poter fare una scelta, dato che **tutti i rilievi vengono fatti attraverso lo scambio di segnali**, si dovrà fissare **preventivamente** il tipo di segnale che si desidera utilizzare.

Questa scelta in genere non è arbitraria, ma **legata allo spazio e al mezzo** che viene considerato, tenendo conto che il segnale si propaga nello spazio con una velocità V_m caratteristica del mezzo che lo occupa.

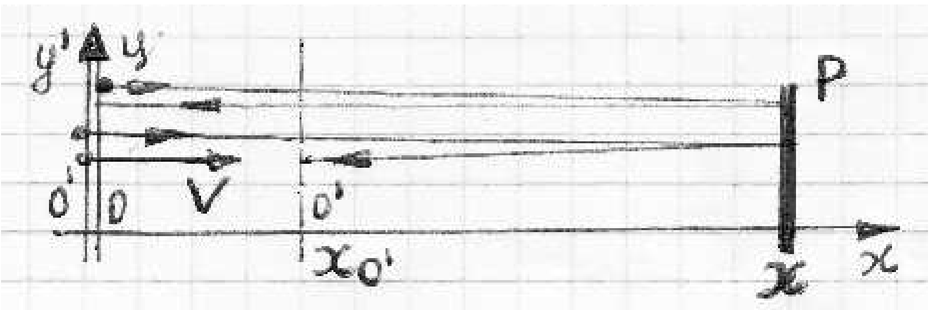
La scelta più semplice ed immediata che si può fare è quella di considerare **regoli ed orologi aventi caratteristiche di funzionamento indipendenti dalle condizioni di moto**.
Consideriamo dunque due sistemi di riferimento in moto relativo con velocità V, come è indicato in figura.

67z21



Con la scelta che è stata indicata, si assume che, se in due punti dello spazio si verificano i due eventi E_1 e E_1 , ciascuno di essi in un certo punto $\mathbf{x}$ e un certo istante t , la loro distanza spaziale $\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{x_2} - \mathbf{x_1})$ e quella temporale $\Delta t = (t_2 - t_1)$, rilevate nel riferimento immobile rispetto allo spazio, risultano coincidenti con le distanze $\Delta\mathbf{x}' = (\mathbf{x'_2} - \mathbf{x'_1})$ e $\Delta\mathbf{t}' = (\mathbf{t'_2} - \mathbf{t'_1})$, osservate nel riferimento in moto con la velocità V.

Tutte le coordinate spaziali si possono però rilevare solo inviando un segnale, **del tipo prescelto**, dall'origine al punto considerato e rilevare quello riflesso.



Consideriamo i due sistemi nel momento in cui le origini si sovrappongono e inviamo da entrambi un segnale che si muove verso P con la stessa velocità V_m , essendo essa indipendente dalla velocità della sorgente.
Nello stesso istante (O ed O' coincidenti) **sincronizziamo i due orologi in modo che si abbiano le indicazioni** $t(0) = t'(0) = \mathbf{0}$.

I segnali inviati giungono nel punto P , vengono riflessi e si muovono verso le origini O ed O' con la stessa velocità V_m , in quanto il punto P si comporta da sorgente.

67z22

Se si suppone nota la velocità V_m, quando il segnale giunge nell'origine O,

immobile, il tempo segnato dall'orologio sarà : $t(2x) = \dfrac{2 \cdot x}{V_m}$

da cui si ricava la coordinata spaziale $x = \dfrac{t(2x) \cdot V_m}{2}$

e quindi anche : $t(x) = \dfrac{x}{V_m}$; $x = t(x) \cdot V_m$

Per quanto riguarda invece il sistema di riferimento mobile O', se $t'(2x)$ è il tempo impiegato complessivamente dal segnale per il percorso di andata e ritorno, nello stesso tempo l'origine O' si sarà spostata di un tratto pari a :

$$x_{O'} = t'(2x) \cdot V$$

Il percorso reale del segnale risulta dunque : $L' = 2 \cdot x - x_{O'}$

Il tempo impiegato sarà quindi :

$$t'(2x) = \frac{L'}{V_m} = \frac{2 \cdot x - x_{O'}}{V_m} = \frac{2 \cdot x - t'(2x) \cdot V}{V_m}$$

da cui si ottiene :

$$t'(2x) = \frac{t(2x)}{1 + \dfrac{V}{V_m}}$$

moltiplicando per la velocità nota del segnale, si ricava il valore della distanza

x' valutata dal riferimento mobile : $x' = \dfrac{t'(2x) \cdot V_m}{2} = \dfrac{x}{1 + \dfrac{V}{V_m}}$

e quindi anche :

67z23

$$t'(x) = \frac{t(x)}{1 + \frac{V}{V_m}} \quad ; \quad x' = \frac{x}{1 + \frac{V}{V_m}}$$

Queste relazioni mettono in evidenza che le coordinate spaziale e temporale del punto P **risultano coincidenti** nei due riferimenti, mobile e fisso, solo se $V_m \to \infty$ e ciò si verifica per qualsiasi valore della velocità relativa V**.**

E'ancora da notare che i due orologi sono stati sincronizzati quando le origini O ed O' erano coincidenti e nello stesso istante sono stati inviati i segnali.

Se i segnali per i rilievi vengono inviati in un istante $t_0 \neq 0$, l'origine in moto O' si troverà nel punto $x_{O'} = t_0 \cdot V$ ed, essendo sincronizzati, entrambi gli orologi indicheranno il tempo t_0 **.**

Si noti che i risultati che si ottengono sono diversi a seconda che si consideri come coordinata spaziale del punto P il percorso del segnale dalla sorgente (origine degli assi) al punto P oppure come il valore medio tra il percorso di andata e quello di ritorno del segnale.

In genere si prescinde dalle reali modalità usate per il rilievo della coordinata spaziale **x** e si considera solo il percorso di andata, senza riflessione.

In questo caso le origini emettono il segnale, **che si muove nel mezzo verso il punto P con la velocità V_m, indipendente dalle velocità delle sorgenti e quindi dagli spostamenti che hanno subito le origini dopo aver emesso i segnali**.

Per i nostri orologi, sincronizzati con O ed O' coincidenti, si avrà quindi :

$$x = t \cdot V_m \quad ; \quad x' = t' \cdot V_m$$

Queste relazioni non esprimono altro che l'indipendenza della velocità di propagazione del segnale da quella della sorgente.

Se ora consideriamo due sistemi di riferimento, con le origini O e O' distanti

67z24

tra loro $\mathbf{x_{O'}}$ e gli orologi non ancora sincronizzati, indipendentemente dal fatto che essi siano in moto relativo o meno, si pone il problema di osservare uno stesso evento da punti diversi dello spazio, oppure effettuare rilievi **su eventi che si verificano in luoghi diversi**, facendo in modo che siano confrontabili i tempi che vengono registrati dagli orologi distanti fra loro.

Si deve dunque concordare una convenzione per sincronizzare gli orologi e, per questa operazione, è richiesta la conoscenza della velocità del segnale, che possiamo però avere solo se disponiamo di orologi sincronizzati posti a una distanza nota.

I tempi degli eventi non possono, pertanto, essere confrontati prima che sia stato stabilito che cosa si deve intendere per "**tempo comune a eventi che si verificano in luoghi diversi**, **ovvero per tempo comune di un evento rilevato da osservatori posti in luoghi diversi**".

Vogliamo quindi sincronizzare i due orologi posti in O ed O'in modo tale che, osservando lo stesso evento, per esempio l'emissione simultanea, nel punto P, di due segnali, forniscano la stessa indicazione del tempo. Ciò in accordo con la verifica sperimentale che ciascuno di essi può fare, intercettando i due segnali.

Se supponiamo di conoscere la velocità di propagazione dei segnali, i tempi indicati dai due orologi, considerati immobili, risultano:

$$t(P) = t(O) + \frac{2 \cdot x}{V_m} \quad ; \quad t'(P) = t'(O') + \frac{2 \cdot (x - x_{O'})}{V_m}$$

dove $t(O)$ e $t'(O')$ rappresentano i tempi indicati dagli orologi quando il punto P coincide con O ed O' rispettivamente.
Uguagliando i due tempi, si ottiene :

$$t'(O') = t(O) + \frac{2 \cdot x_{O'}}{V_m}$$

Se gli osservatori sono tutti immobili, la loro distanza $\mathbf{x_{O'}}$ è costante e quindi la sincronizzazione è relativamente semplice. Tenendo conto della costanza di V_m durante il percorso di andata e ritorno, si può trascurare il percorso doppio ed assumere semplicemente :

67z25

$$t'(O') = t(O) + \frac{x_{O'}}{V_m}$$

Secondo Einstein, per definire " il tempo comune di due eventi A e B distanti fra loro", **si assume**, **per definizione**, **che il tempo impiegato dal segnale per propagarsi da A a B sia uguale a quello richiesto per tornare da B ad A**.

Se dunque t_A è il tempo segnato dall'orologio vicino ad A nel momento della partenza da A, t_B il tempo indicato dall'orologio vicino a B nel momento in cui il segnale giunge in B e t'_A quello registrato dall'orologio vicino ad A quando il segnale ritorna in A , i due orologi si diranno sincronizzati se è verificata la relazione :

$$t'_A - t_B = t_B - t_A$$

da questa relazione segue che la velocità del segnale nel percorso di andata è uguale a quella del percorso di ritorno, ossia, **si ha per definizione** :

$$V_m = \frac{L_{AB}}{t_B - t_A} = \frac{L_{AB}}{t'_A - t_B}$$

E' da notare che la relazione definisce una coppia di orologi sincroni senza alcun riferimento alle reali operazioni necessarie per la sincronizzazione, ma può essere comunque utilizzata realmente per l'operazione, secondo la :

$$t_B = t_A + \frac{L_{AB}}{V_m}$$

che coincide con la relazione che abbiamo indicato poc'anzi.

Per quanto riguarda la componente spaziale, nota la posizione dell'origine O' in qualsiasi momento si ha :

$$x' = (x - x_{O'})$$

Dove tutte le misure si suppongono rilevate simultaneamente nel riferimento immobile al tempo t e quindi **non dovrebbero porre particolari problemi**.

67z26

I due rilievi $x_{O'}$ e $\mathbf{x}$ potranno però essere simultanei solo se i due segnali, che sono patriti **contemporaneamente** dall'origine O nell'istante t_O, impiegano lo stesso tempo per raggiungere i punti $x_{O'}$ e $\mathbf{x}$, risultato che si ottiene solo se il segnale si propaga con velocità di valore infinito.

Supponendo di essere in queste condizioni e che l'origine dei due sistemi di riferimento fossero coicidenti per $t = \mathbf{0}$, al tempo t vengono rilevati sia $\mathbf{x}$ che $x_{O'}$ e risulta $x_{O'} = V \cdot t$ e quindi, sostituendo, possiamo calcolare il valore della componente spaziale "**x' valutata al tempo** t" con tutte le osservazioni fatte nel riferimento immobile. Si avrà :

$$\mathbf{x}'(O) = (\mathbf{x} - V \cdot t)$$

Per l'indipendenza della velocità di propagazione del segnale da quella delle sorgenti, si possono sostituire le coordinate spaziali e si ottiene :

$$t' \cdot V_m = (t \cdot V_m - V \cdot t)$$

da cui : $$t' = \left(t - \frac{V}{V_m} \cdot t \right) = \left(t - \frac{V}{V_m} \cdot \frac{\mathbf{x}}{V_m} \right)$$

in definitiva, la relazione tra i **tempi di transito** dei segnali dalle origini O e O' al punto P risulta :

$$t' = \left(t - \frac{V \cdot \mathbf{x}}{V_m^2} \right)$$

Il tempo che ciascun orologio indica quando il segnale raggiunge il punto P dipende dal valore indicato $t_0(O)$ e $t'_0(O')$ nel momento in cui il segnale è stato emesso, ossia dal tipo di sincronizzazione degli orologi.

E' chiaro che le misurazioni effettuate da questi orologi, **relative ad un unico evento**, **potranno essere** simultanee **solo se si dispone di un segnale che si trasmette nello spazio con velocità** $V_m \to \infty$, **dunque in**

67z27

un tempo uguale a zero per qualunque distanza.

In questo caso, se gli orologi vengono sincronizzati nell'origine O, lo saranno in qualunque momento e "**indicheranno sempre e in qualunque luogo lo stesso tempo**, **indipendentemente dalle condizioni di moto**.

E' questa la condizione che ha portato alla trasformazione di Galileo, il quale aveva assunto come segnali per l'indagine quelli luminosi, che si trasmettono con una velocità tale da poter essere considerata infinita, rispetto a quelle con con le quali normalmente si lavora. Si ottiene così :

$$\left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x' = x - V \cdot t} \\ \mathbf{y' = y} \\ \mathbf{t' = t} \end{array} \right\} \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{x = x' + V \cdot t} \\ \mathbf{y = y'} \\ \mathbf{t = t'} \end{array} \right\}$$

In queste relazioni, **dovute a Galileo**, " **lo spazio ed il tempo hanno un valore assoluto** ", **indipendente dall'osservatore**, **che assume un ruolo passivo**,**descrivendo con le trasformazioni una realtà che non dipende dalle osservazioni e ogni suo cambiamento viene attribuito al diverso modo di osservare**.

Si può quindi affermare che il gruppo di relazioni, **che costituiscono le trasformate**, **trasformano un osservatore nell' altro**, **mentre esiste una realtà**, **quella descritta**, **che non cambia**.

Non è però questa l'unica lettura possibile delle trasformazioni. Si può infatti anche pensare, lecitamente, che non esista una realtà indipenente, ma che essa coincida ogni volta con quello che viene osservato.

In questo caso l'osservatore assume un **ruolo attivo**, contribuendo a definire la realtà, attraverso le sue condizioni di moto rispetto allo spazio osservato.
Le relazioni descrivono così delle realtà, che vengono generate di volta in volta, con i diversi modi di osservare lo spazio.
E', per esempio, il caso delle trasformazioni di Lorentz, che prevedono reali cambiamenti delle caratteristiche dello spazio prodotte dall'osservatore.

Se un corpo si muove con velocità costante v rispetto al sistema immobile O, la velocità v' rispetto a quello mobile O' si ottiene immediatamente dividendo membro a membro i differenziali della prima e della terza espressione delle trasformazioni di Galileo.

67z28

Si ricava quindi : $\dfrac{\Delta x'}{\Delta t'} = v'$; $\dfrac{\Delta x}{\Delta t} = v$; $v' = v - V$

derivando rispetto al tempo, si ottengono le accelerazioni : $a' = a$

e, ipotizzando la costanza della massa, ossia : $m' = m$, per le forze, si ha:

$$F' = m' \cdot a' = m \cdot a = F$$

Se nei due sistemi coincidono le forze, si verificano gli stessi trasferimenti di energia e quindi si generalizza dicendo:
Le leggi fisiche si esprimono con le stesse relazioni in tutti i sistemi di riferimento inerziali, **ossia in moto relativo con velocità costante**.

Abbiamo visto che queste trasformazioni sono valide solo se il segnale, che viene utilizzato per i rilievi, si propaga con velocità infinita.
Galileo era perfettamente consapevole che la luce, che egli aveva usato nella sua trasformazione, si propaga con una velocità molto elevata, ma finita.

In mancanza di segnali che possano propagarsi nello spazio con una velocità infinita, non è più sostenibile l’esistenza di un tempo assoluto, avente validità universale e bisogna quindi rivedere il concetto di tempo.

Innanzitutto osserviamo che, essendo **i moti relativi** gli unici che si possono osservare, per una descrizione razionale del moto di un punto o di qualsiasi processo fisico, è sempre opportuno scegliere " **un sistema di riferimento fisso**, **con gli assi solidali con lo spazio fisico nel quale si propagano i segnali** ".

Se nello **stesso spazio si assume un altro sistema di riferimento** in moto rispetto al primo con velocità V, **il nuovo sistema di assi s’intende in moto anche rispetto allo spazio fisico**, **che rimane fermo**.

Anche in queste condizioni, **normalmente**, si ritiene che lo spazio conservi il significato di spazio assoluto e quindi **le lunghezze rimangono invariate**, passando da un riferimento all’altro.

Questo assunto ha la sua validità solo in considerazione del fatto che per noi è possibile impiegare, per la misura delle coordinate, la luce con una velocità di propagazione enormemente più elevata di quella dei corpi ordinari.

67z29

Per un’analisi corretta, bisogna però considerare che le coordinate, spaziale e temporale, vengono determinate proprio attraverso il moto di corpi comuni e quindi il rapporto tra la loro velocità e quella dei segnali utilizzati non si può più ritenere ininfluente.

Il tempo e lo spazio perdono quindi il loro valore universale e vengono influenzati dai fenomeni stessi che si vogliono indagare.
Per il solo fatto che la velocità dei segnali utilizzati è finita, **le trasformazioni di Galileo assumono quindi la forma generalizzata**:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x - V \cdot t \\ y' = y \\ t' = t - \dfrac{V \cdot x}{V_m^2} \end{array} \right.$$

che si riduce alla forma canonica per $V_m \to \infty$.
Da questa trasformazione, **operando solo algebricamente**, si ottiene quella inversa :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \left(x' + V \cdot t \right) \\ y = y' \\ t = t' + \dfrac{V \cdot x}{V_m^2} \end{array} \right.$$

naturalmente, se è vera la trasformazione diretta lo è anche quella inversa.

Differenziando e dividendo membro a membro la prima e la terza relazione, **delle trasformazioni di Galileo generalizzate** (senza alcuna condizione), si ottiene :

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\left(\Delta x - V \cdot \Delta t \right)}{\Delta t - \dfrac{V \cdot \Delta x}{V_m^2}} = \frac{\Delta t \cdot \left(\dfrac{\Delta x}{\Delta t} - V \right)}{\Delta t \left(1 - \dfrac{V}{V_m^2} \cdot \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \right)}$$

67z30

sostituendo : $\dfrac{\Delta \mathbf{x}'}{\Delta \mathbf{t}'} = v'$ e $\dfrac{\Delta \mathbf{x}}{\Delta \mathbf{t}} = v$

si ricava così la relazione :

$$v = \frac{v' + V}{1 + \dfrac{V \cdot v'}{V_m^2}}$$

la quale esprime la legge di composizione delle velocità generalizzata, che si applica quando i segnali che vengono utilizzati per le osservazioni hanno una velocità di propagazione V_m di valore finito.

E' da notare che alla base della trasformazione che abbiamo ricavato e **della conseguente legge di composizione delle velocità**, **non è stata posta nessuna ipotesi restrittiva o particolari postulati**, **quindi la loro validità è assolutamente generale**.

L'espressione della composizione delle velocità così ricavata costituisce una generalizzazione del risultato fornito da Galileo, applicato al caso in cui V_m assume un valore finito ed è stata ricavata senza alcuna ipotesi restrittiva.

Da tale espressione vediamo che, se abbiamo un punto in moto con velocità v' rispetto al sistema di riferimento che si muove con velocità V rispetto al mezzo, e viene considerata infinita la velocità di propagazione dei segnali, la velocità del punto rilevata da un osservatore immobile risulta :

$$v = v' + V$$

in accordo con la trasformazione di Galileo.

Se invece si considera V_m di valore finito, la velocità rilevata dall'osservatore fisso risulta minore del valore $(v' + V)$ con una differenza che aumenta con la velocità del punto v' fino a raggiungere il valore massimo V, quando esso si muove con una velocità uguale a quella con la quale si propaga il segnale.

67z31

Dalla relazione risulta infatti che se una delle velocità v' o V è uguale a V_m , (oppure entrambe) ossia se l'osservatore mobile oppure l'oggetto che viene osservato si muove con una velocità uguale a quella del segnale, la velocità rilevata dall'osservatore immobile rispetto al mezzo è ancora uguale a V_m **.**

La velocità di propagazione del segnale V_m , che viene utilizzato per comunicare, **definisce dunque anche il valore massimo della velocità osservabile**.

Se dunque l' oggetto da osservare " si muove già con la velocità $\mathbf{V_m}$ ", in pratica, se coincide con una sorgente di segnali dello stesso tipo di quelli utilizzati per i rilievi, tutti gli osservatori, indipendentemente dal valore della loro velocità V , vedranno il segnale in arrivo sempre con la stessa velocità $\mathbf{V_m}$.

Se un oggetto si muove con una velocità maggiore di quella dei segnali usati per rilevarne la presenza, **non è osservabile** e quindi, per quell'osservatore, di fatto non esiste.

E' chiaro quindi che quanto più elevata è la velocità di propagazione del segnale utilizzato, **tanto più elevato sarà il numero di oggetti che si potranno osservare**.

Per esempio, **se per l'osservazione si utilizza un'onda sonora**,come per esempio fa il pipistrello, **si ha una visione del mondo molto più limitata** di quella che si può avere con la luce.

Ritornando alla nostra trasformazione, **se ora scambiamo i due riferimenti e trascuriamo l'esistenza del mezzo in cui si propagano i segnali**, **per la relatività del moto**, **nelle relazioni si scambieranno** :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' \quad ; \quad t \rightarrow t' \quad ; \quad V \rightarrow -V.$$

Applicando questa sostituzione alla trasformazione di galileo con $V_m \rightarrow \infty$, si ottiene una trasformazione inversa coincidente con quella che si ricava per via algebrica.

Questo vuol dire che per $V_m \to \infty$ i due sistemi di riferimento si trovano in una condizione di perfetta simmetria e quindi la legge del moto non dipende da quale dei due riferimenti viene ritenuto immobile rispetto allo spazio.

Se invece si applica la sostituzione, alla trasformazione generalizzata, **che è stata ricavata assumendo V_m di valore finito**, si ottiene la trasformazione:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \left(x' + V \cdot t'\right) \\ y &= y' \\ t &= t' + \frac{V \cdot x'}{V_m^2} \end{aligned} \right\}$$

in disaccordo con quella ottenuta operando algebricamente.

Questo vuol dire che con V_m di valore finito si perde l'equivalenza dei sistemi di riferimento e la trasformazione generalizzata, **che abbiamo proposto per descrivere il moto di un punto**, **non è corretta**, **oppure lo scambio dei due riferimenti**, **considerando solo la loro velocità relativa e non quella rispetto al mezzo**, **non è fisicamente accettabile**.

In definitiva abbiamo:

– $V_m \to \infty$: $\quad x' = \left(x - V \cdot t\right) \to x = \left(x' + V \cdot t\right) \to x = \left(x' + V \cdot t'\right)$

$$t' = t$$

– V_m **finito** : $\quad x' = \left(x - V \cdot t\right) \to x = \left(x' + V \cdot t\right) \to x \neq \left(x' + V \cdot t'\right)$

$$t' = t - \frac{V \cdot x}{V_m^2} \to t = t' + \frac{V \cdot x}{V_m^2} \to t \neq t' + \frac{V \cdot x'}{V_m^2}$$

Se si nega il ruolo di **sistema di riferimento privilegiato**, in quiete assoluta, al mezzo nel quale si propagano i segnali, viene a mancare il **moto assoluto** e quindi **i soli moti osservabili sono quelli relativi**.

A questo punto, **possiamo pensare che non esista una realtà oggettiva**,

indipendente dall' osservatore, **ma che essa si identifichi con ciò che si osserva e quindi assumiamo che le due trasformazioni descrivano realtà diverse**.

Se invece assumiamo che la realtà fisica sia oggettiva e indipendente dall'osservatore, **anche con una velocità dei segnali di valore finito**, se scambiamo tra loro i due riferimenti, la legge che descrive il moto di un punto **deve restare formalmente invariata**.

Se optiamo per questa seconda scelta, le relazioni che abbiamo ricavato non soddisfano queste condizioni e quindi si debbono modificare.

Dato che per $\dfrac{V}{V_m} \rightarrow 0$ si deve ottenere la trasformazione di Galileo, non si dovranno stravolgere completamente le relazioni, ma vanno solo modificate perchè si verifichi la compatibilità richiesta.

La più semplice modifica che riusciamo ad immaginare è **la dipendenza da un fattore** γ, che si riduca al valore unitario per $\dfrac{V}{V_m} \rightarrow 0$, ossia per $V = 0$ oppure $V_m \rightarrow \infty$, da determinare in modo tale da rendere la trasformazione invariante rispetto allo scambio di riferimenti inerziali. Scriviamo dunque :

$$x' = \gamma \cdot (x - V \cdot t) \quad ; \quad x = \gamma \cdot (x' + V \cdot t')$$

Sostituendo : $x = V_m \cdot t \quad ; \quad x' = V_m \cdot t'$

si ricavano le relazioni :

$$t' = \gamma \cdot \left(t - \frac{V \cdot x}{V_m^2} \right) \quad ; \quad t = \gamma \cdot \left(t' + \frac{V \cdot x'}{V_m^2} \right)$$

Le due trasformazioni che dovranno essere compatibili sono dunque :

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - V \cdot t) \\ t' &= \gamma \cdot \left(t - \frac{V \cdot x}{V_m^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad ; \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \gamma \cdot (x' + V \cdot t') \\ t &= \gamma \cdot \left(t' + \frac{V \cdot x'}{V_m^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

Se moltiplichiamo membro a membro la prima relazione con la seconda e la terza con la quarta, si ottiene:

$$x \cdot x' = \gamma^2 \cdot \left(x \cdot x' + V \cdot x \cdot t' - V \cdot x' \cdot t - V^2 \cdot t' \cdot t \right)$$

$$t' \cdot t = \gamma^2 \cdot \left(t' \cdot t + \frac{V}{V_m^2} \cdot x' \cdot t - \frac{V}{V_m^2} \cdot x \cdot t' - \frac{V^2}{V_m^4} \cdot x \cdot x' \right)$$

dividendo la prima per $(x \cdot x')$ e la seconda per $(t' \cdot t)$, si ha :

$$1 = \gamma^2 \cdot \left(1 + V \cdot \frac{t'}{x'} - V \cdot \frac{t}{x} - V^2 \cdot \frac{t' \cdot t}{x \cdot x'} \right)$$

$$1 = \gamma^2 \cdot \left(1 + \frac{V}{V_m^2} \cdot \frac{x'}{t'} - \frac{V}{V_m^2} \cdot \frac{x}{t} - \frac{V^2}{V_m^4} \cdot \frac{x \cdot x'}{t' \cdot t} \right)$$

dal confronto vediamo che le due relazioni coincidono **solo se si verifica** :

$$\frac{x'}{t'} = \frac{x}{t} = V_m$$

ossia se la velocità del segnale risulta una caratteristica costante, dipendente solo dal mezzo.
Sostituendo queste relazioni, si ricava che :
In questo caso la trasformazione risulta invariante, **rispetto a qualsiasi riferimento inerziale**, **se il fattore γ assume il valore** :

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}}$$

che, sostituito nella trasformazione generalizzata, fornisce la **trasformazione di Lorentz** in una delle forme equivalenti:

$$\begin{cases} x' = \gamma \cdot (x - V \cdot t) \\ y' = y \\ t' = \gamma \cdot \left(t - \dfrac{V \cdot x}{V_m^2} \right) \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + V \cdot t') \\ y = y' \\ t = \gamma \cdot \left(t' + \dfrac{V \cdot x'}{V_m^2} \right) \end{cases}$$

E' da notare che la condizione necessaria per avere una trasformazione che non dipenda dal sistema di riferimento in cui vengono fatti i rilievi si riduce al fatto che **la velocità del segnale V_m sia indipendente dal riferimento dal quale vengono inviati i segnali per i rilievi**.

Ricordiamo che il moto della sorgente rispetto al mezzo cambia la frequenza del segnale, per effetto Doppler, ma non modifica la velocità di propagazione attraverso il mezzo, **per qualsiasi tipo di segnale**.

La velocità di propagazione del segnale non può neanche essere modificata dall'osservatore, in quanto esso, con il suo moto modifica solo lo spazio che il segnale percorre e **non la sua velocità**, cosa che, del resto, abbiamo visto trattando l'effetto Doppler.

E'chiaro che l'aumento dello spazio percorso con velocità invariata comporta un aumento del tempo impiegato dal segnale per raggiungere l'osservatore,

secondo la relazione : $t' = \dfrac{L_0 + V \cdot t'}{V_m}$ da cui si ricava il valore del tempo

realmente impiegato dal segnale per raggiungere l'osservatore :

$$t' = \frac{t_0}{1 - \dfrac{V}{V_m}}$$

Essendo nota la distanza L_0 , misurata con $V = 0$, apparentemente il segnale si è spostato con la velocità :

$$V'_m = \frac{L_0}{t'} = V_m \cdot \left(1 - \frac{V}{V_m} \right)$$

Essendo la velocità del segnale **rispetto al mezzo** indipendente anche dalle condizioni di moto dell'osservatore, possiamo concludere che :

"**Esso rappresenta un riferimento privilegiato**" e tutte le velocità debbono essere riferite al mezzo, **che viene ritenuto immobile**.
Non è quindi sufficiente, **per descrivere il moto**, **considerare le velocità relative di un riferimento rispetto all'altro**.

Differenziando la trasformazione di Lorentz nelle due forme, si ottiene :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{x}' = \gamma \cdot \left(\Delta \mathbf{x} - V \cdot \Delta t \right) \\ \Delta t' = \gamma \cdot \left(\Delta t - \dfrac{V \cdot \Delta \mathbf{x}}{V_{\mathbf{m}}^{\mathbf{2}}} \right) \end{array} \right\} ; \left\{ \begin{array}{l} \Delta \mathbf{x} = \gamma \cdot \left(\Delta \mathbf{x}' + V \cdot \Delta t' \right) \\ \Delta t = \gamma \cdot \left(\Delta t' + \dfrac{V \cdot \Delta \mathbf{x}'}{V_{\mathbf{m}}^{\mathbf{2}}} \right) \end{array} \right\}$$

Se nello stesso punto $\mathbf{x_0}$ del sistema di riferimento immobile vengono emessi due segnali a carattere impulsivo nei tempi t_1 e t_2 (misurati dall'orologio sul posto) , si avrà : $\Delta t = t_2 - t_1$ con $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Nel sistema di riferimento in moto i due eventi vengono registrati in due punti diversi, distanti tra loro :

$$\Delta \mathbf{x}' = \gamma \cdot \left(\Delta \mathbf{x} - V \cdot \Delta t \right) = - \gamma \cdot V \cdot \Delta t = - V \cdot \Delta t'$$

e ad una distanza di tempo maggiore di Δt , precisamente :

$$\Delta t' = \gamma \cdot \Delta t = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{\mathbf{1} - \dfrac{V^2}{V_{\mathbf{m}}^{\mathbf{2}}}}}$$

Analogamente, se nello stesso punto $\mathbf{x_{P0}}'$ del riferimento mobile si verificano due eventi nei tempi t'_{P1} e t'_{P2} (misurati con l'orologio locale), si avrà :

$$\Delta t_P' = t'_{P2} - t'_{P1} \quad \text{con} \quad \Delta \mathbf{x_P}' = \mathbf{0} \, .$$

Nel riferimento immobile i due impulsi vengono registrati in due punti diversi, distanti :

$$\Delta x = \gamma \cdot \left(\Delta x_P' + V \cdot \Delta t_P' \right) = \gamma \cdot V \cdot \Delta t_P' = V \cdot \Delta t$$

ad una distanza temporale :

$$\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_P' = \frac{t'_{P2} - t'_{P1}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}}$$

E' da notare che x , t , x_P' , t'_P sono le misure rilevate nel proprio riferimento con orologi e regoli solidali con il riferimento stesso e si indicano come valori propri. Le espressioni ottenute per $\Delta t'$ e Δt esprimono la nota **dilatazione dei tempi**, che ciascun osservatore avverte nell'altro (visto in moto relativo) e pertanto ci dicono che :

Qualsiasi osservatore in moto rispetto al riferimento proprio rileva una distanza temporale tra gli eventi sempre maggiore di quella propria.

Oppure, in termini equivalenti:
Il tempo registrato tra due eventi è minore per l'osservatore che vede gli eventi realizzarsi nello stesso luogo.

Normalmente questo risultato viene espresso sinteticamente dicendo che :
" **Per l'osservatore in movimento il tempo scorre più lentamente** ".
E questo non è del tutto corretto.

E' da notare che, se nell'origine O', in moto rispetto al mezzo, abbiamo una sorgente che, quando è in quiete **genera segnali impulsivi di periodo** T_{0S} , il tempo $\Delta t_P' = t'_{P2} - t'_{P1}$ può rappresentare la distanza temporale tra due fronti d'onda consecutivi, ossia il periodo T_S del segnale che viene emesso e realmente trasferito nello spazio **quando di muove con velocità** V.

Studiando l'effetto doppler abbiamo visto che vale :

$$\Delta t_P' = T_S = T_{0S} \cdot \left(1 - \frac{V}{V_m} \right) \quad \text{e quindi anche : } f_S = f_{0S} \cdot \frac{1}{1 - \frac{V}{V_m}}$$

L'osservatore, **immobile**, vede la sorgente in moto **con un periodo dilatato** secondo la relazione :

$$T_O = \Delta t = \gamma \cdot \Delta t_P' = \frac{T_S}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}} = T_{0S} \cdot \frac{1 - \frac{V}{V_m}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}} =$$

$$= T_{0S} \cdot \frac{1 - \frac{V}{V_m}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}} = T_{0S} \frac{\sqrt{1 - \frac{V}{V_m}}}{\sqrt{1 + \frac{V}{V_m}}}$$

la frequenza osservata risulta quindi:

$$f_O = f_{0S} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{V}{V_m}}}{\sqrt{1 - \frac{V}{V_m}}} = f_{0S} \cdot \frac{\sqrt{V_m + V}}{\sqrt{V_m - V}}$$

che coincide con quella indicata dall'effetto Doppler relativistico.

Supponiamo ora che in punti diversi x_1 e x_2 del sistema immobile vengano emessi due segnali simultaneamente al tempo t_0; si avrà :

$$\Delta x = x_2 - x_1 \text{ con } \Delta t = 0.$$

Nel sistema di riferimento in moto i due eventi vengono registrati in due tempi diversi, distanti tra loro :

$$\Delta t' = \gamma \cdot \left(\Delta t - \frac{V \cdot \Delta x}{V_m^2} \right) = -\gamma \cdot \frac{V \cdot \Delta x}{V_m^2} = -\frac{V}{V_m^2} \cdot \Delta x'$$

Il valore della distanza rilevata nel sistema mobile risulta :

$$\Delta x' = \gamma \cdot \Delta x = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}}$$

Analogamente, se nei punti x'_{P1} e x'_{P2} del sistema mobile vengono emessi due segnali simultaneamente al tempo t'_{P0} , si avrà :

$$\Delta x_P' = x'_{P2} - x'_{P1} \text{ con } \Delta t_P' = 0.$$

Nel sistema di riferimento immobile gli stessi eventi vengono registrati in due tempi diversi, distanti tra loro :

$$\Delta t = \gamma \cdot \left(\Delta t_p' + \frac{V \cdot \Delta x_P'}{V_m^2} \right) = \gamma \cdot \frac{V}{V_m^2} \cdot \Delta x_P' = \frac{V}{V_m^2} \cdot \Delta x$$

e la distanza spaziale rilevata risulta :

$$\Delta x = \gamma \cdot \Delta x_P' = \frac{x'_{P2} - x'_{P1}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}}$$

Questi ultimi risultati ci dicono che :

Qualsiasi osservatore in moto rispetto al riferimento proprio rileva una distanza spaziale tra gli eventi sempre minore di quella propria.

Oppure, in termini equivalenti:
La distanza spaziale tra due eventi è sempre minore per l'osservatore che li vede realizzati nello stesso tempo.
Normalmente questo risultato si esprime sinteticamente dicendo che :
" **Per l'osservatore in movimento le lunghezze si contraggono nella direzione del moto** ".

Anche questa non è una indicazione precisa ed è comunque riferita alle due espressioni scritte nella forma :

$$\Delta x_P' = \frac{\Delta x}{\gamma} = \left(x_2 - x_1\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}$$

$$\Delta x = \frac{\Delta x'}{\gamma} = \left(x'_{P2} - x'_{P1}\right) \cdot \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_m^2}}$$

I risultati che abbiamo ottenuto mettono in evidenza che, se si considera solo il moto relativo tra i due sistemi di riferimento, **trascurando l'esistenza del mezzo**, il sistema fisso vede ciò che accade su quello mobile esattamente come il riferimento mobile vede ciò che accade su quello fisso.

Il risultato è assolutamente ovvio, in quanto, eliminando il sistema di riferimento solidale con lo spazio, mobile e fisso non hanno significato assoluto, ma relativo e noi di fatto non siamo in grado di precisare quale dei due è in moto.

Questa indeterminazione viene superata **se le velocità vengono riferite al mezzo in cui si propagano i segnali**.

In base a queste considerazioni, con riferimento alla figura, se un segnale si propaga con la velocità V_m, come abbiamo già visto, qualunque sia la sua natura, purchè immateriale, **la sua velocità di propagazione non dipende dalla velocità della sorgente**. Essa è però dipendente da quella dell'osservatore.

Come abbiamo già visto, l'esperimento di Michelson e tutte le altre prove a sostegno del postulato di Einstein sulla velocità della luce non tengono conto della presenza della sfera planetaria di spazio fisico solidale con la Terra e con qualsiasi corpo celeste, necessaria per rendere conto dell'osservazione sperimentale, che **l'azione gravitazionale si manifesta istantaneamente**.

Al postulato sulla velocità della luce sono inoltre legate molte indeterminazioni che necessitano di chiarimenti.

67z41