

– **Formule empiriche ( Weizsacker , Green, Wapstra, Rohlf) per il calcolo dell'energia di legame e incoerenza del modello nucleare a goccia**

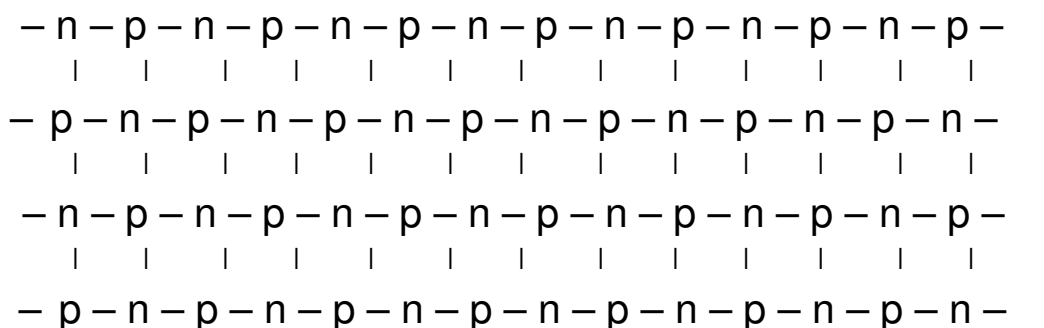
Abbiamo visto che il nucleo atomico è completamente definito dal numero di protoni  $Z$  , di neutroni  $N$  e dell'energia di legame  $E_{ZN}$  .

Questi valori vengono forniti tutti direttamente dall'osservazione sperimentale e quindi non siamo in grado di distinguere due nuclei che abbiano tutti e tre i valori coincidenti entro i limiti di errore associati agli esperimenti.

Qualunque sia il modello che viene proposto per descrivere un **aggregato di particelle diverse tra loro**, il primo problema che si pone è quello di definire la loro collocazione all'interno del volume occupato dall'aggregato.

Se immaginiamo le particelle con caratteristiche a simmetria sferica, tenendo presente che ciascuna di esse ha, nei confronti di tutte le altre appartenenti a un certo tipo, lo stesso comportamento, si deve pensare a una distribuzione uniforme di un tipo nell'altro e se ne ricava un aggregato che presenta ancora una simmetria sferica.

Questa distribuzione non crea nessun problema se il numero delle particelle presenti di ciascun tipo è lo stesso. Si ha infatti una serie di legami del tipo :



In questo caso sarà sufficiente ipotizzare che entrambe le particelle abbiano la capacità di legarsi stabilmente a più particelle dell'altro tipo, **caratteristica affatto intuitiva**, dal momento che, per esempio, il protone esaurisce la sua capacità d'azione legandosi ad un solo elettrone, nonostante esso abbia una massa infinitamente più piccola.

La scelta del modello si complica ulteriormente se il numero di particelle dei

due tipi è diverso, come accade nel nostro caso.

Si pone infatti il problema di collocare le particelle in eccesso, che nel nostro caso sono neutroni.

La scelta più semplice sarà, naturalmente, una **distribuzione uniforme** nella matrice che è stata tracciata.

**Dobbiamo decidere** se legarli ai neutroni già presenti, ai protoni oppure ad entrambi, senza alcuna distinzione.

E' chiaro che la scelta non potrà essere arbitraria, ma deve tener conto delle osservazioni sperimentali alle quali il modello deve dare risposte. Riportiamo qui qualcuna delle più evidenti.

- negli isotopi naturali si ha sempre un eccesso di neutroni **e mai di protoni**
- contrariamente a quanto si potrebbe supporre, l'eccesso di neutroni, **e non di protoni**, crea instabilità nella struttura del nucleo
- l'eccesso di neutroni accettabile, per la stabilità, aumenta con le dimensioni del nucleo considerato
- in natura non si hanno mai aggregati liberi del tipo  $p-p$  oppure  $n-n$
- i legami semplici che si osservano sono :  $p-n$  ( deutone ) stabile ;  
 $n-p-n$  ( trizio ) instabile (  $T \simeq 12,33$  anni ) ;  $p-n-p$  ( elio ) stabile
- in natura non si trovano neutroni liberi e quando essi vengono prodotti, in un tempo di circa **13** minuti, si trasformano in protoni, liberando un elettrone.

Le ultime osservazioni indicano **come unica possibilità quella di legare il neutrone in eccesso a un protone libero o " poco legato "**, in quanto, se esso è già legato anche a un solo neutrone, il nuovo legame risulta instabile.

Considerando anche le altre osservazioni, non solo risulta impossibile poter collocare in maniera stabile i neutroni in eccesso, ma si ha anche una chiara incompatibilità con la matrice elementare proposta.

La stabilità del deutone e l'instabilità del trizio indicano che, legandosi ad un neutrone " a distanza piuttosto ravvicinata ", il protone **esaurisce "quasi del tutto"** la sua capacità d'azione ( ricordiamo che il discorso viene fatto altrove in termini più precisi con il bilancio del momento angolare ) e non riesce più a legarsi stabilmente ad un altro neutrone.

Il secondo legame potrà diventare stabile solo se il primo è più debole.

Tutte le osservazioni e le esigenze che sono state indicate possono essere soddisfatte se il nucleo viene pensato **formato solo da legami neutroni — protoni polarizzati**, con **livello di polarizzazione**, e dunque **di energia di legame**, dipendente dalla loro distanza ed è il modello proposto dalla teoria degli spazi rotanti.

Per semplificare la trattazione, si può prescindere da queste osservazioni e considerare tutte le **particelle equivalenti, indicandole come nucleoni**. In questo modo si rendono possibili **tutti i legami** di una particella con quelle direttamente a contatto.

E' chiaro comunque che, qualunque sia il modello scelto, per conservare una simmetria sferica, le particelle debbono disporsi su strati concentrici. Calcoliamo dunque il numero di strati che si ottengono nei casi reali con due diversi modelli.

In un'analisi di prima approssimazione, che siamo comunque obbligati a fare se non conosciamo i meccanismi che stanno alla base della sintesi nucleare, **ipotizzando un solo tipo di legame tra protone e neutrone**, i valori **Z** ed **N** definiscono in maniera inequivocabile il nucleo.

Non potendo avere nuclei formati con gli stessi valori di **Z** ed **N** con legami diversi, anche il valore dell'energia di legame  **$E_{ZN}$**  è **univocamente definita**.

Se invece si ammette l'esistenza, nel nucleo, di diversi tipi di legame, i valori **Z** ed **N**, da soli, non possono essere sufficienti per caratterizzare un nucleo, in quanto sarà possibile avere nuclei con gli stessi valori di **Z** ed **N** e diversa energia di legame.

Le teorie correnti più accreditate, per giustificare la convivenza, nel nucleo, di protoni e neutroni, prevedono un solo tipo di legame che non distingue il tipo di particella ed esercita quindi la stessa azione negli accoppiamenti **p — n**, **n — p**, **p — p**, **n — n**.

Si parla così di legame tra nucleoni, senza più alcuna distinzione tra protoni e neutroni.

**Questa semplificazione viene comunque accettata anche se risulta in chiaro contrasto con il fatto che nella, ormai lunga, esperienza atomica**

e nucleare **non è mai stata osservata o prodotta alcuna forma legame diretto tra neutroni oppure tra protoni.**

Con questa scelta viene evitato così il problema della collocazione, all'interno del nucleo, **dei neutroni eccedenti.**

Senza alcuna distinzione, i nucleoni vengono semplicemente considerati con una distribuzione uniforme ad una distanza costante tra loro.

Se si indica con  $r_0$  il valore del raggio della sfera che "**viene occupata**" da un nucleone, il raggio del nucleo formato da  $A$  nucleoni risulterà :

$$r_A = \left( \frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

Normalmente, per il nucleo atomico, viene proposta la dipendenza, **verificata sperimentalmente** :

$$r_A = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad \text{con} \quad R_0 \simeq (1,2 \div 1,4) \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Dal valore di  $R_0$  si ricava :

$$r_0 = \frac{R_0}{\left( \frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}}} = 0,9672 \cdot 10^{-15} \text{ m} \ll r_{0P} = 1,4089705 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

in evidente contrasto con la incomprimibilità dei protoni.

Osserviamo ancora che, se i nucleoni si dispongono ad una distanza tra loro fissa uguale a  $r_0$ , formano necessariamente  $n$  strati contigui su ciascuno dei quali si trovano  $A_n$  nucleoni, che vengono forniti dalla relazione :

$$A_n = \frac{4 \cdot \pi \cdot (n \cdot 2 \cdot r_0)^2}{(2 \cdot r_0)^2} = 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot n^2)$$

con  $n = 1, 2, 3, \dots$

Individuato il numero di strati  $n_s$  occupati da  $A_{n_s}$  nucleoni, il raggio  $r_A = r_{n_s}$  del nucleo sarà :

$$r_A = r_{n_s} = r_0 \cdot (1 + 2 \cdot n_s)$$

sommando i nucleoni presenti su ogni strato, il numero complessivo di quelli presenti nel nucleo avente  $n_s$  strati saturi risulta :

$$\begin{aligned} A_{n_s} &= 1 + 2 \cdot \pi \cdot \sum_1^{n_s} (2 \cdot n^2) = \\ &= \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot n_s \cdot (n_s + 1) \cdot (2 \cdot n_s + 1) + 1 \end{aligned}$$

Possiamo verificare la relazione calcolando, per esempio, il raggio del Sole, considerando che, in questo caso, abbiamo  $n_s \gg 1$ .

Si ha quindi :

$$A_{n_s} = \frac{m_s}{m_H} \simeq \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot 2 \cdot n_s^3$$

dove  $m_s$  e  $m_H$  indicano le masse rispettivamente del Sole e dell'atomo di idrogeno. Si ricava quindi :

$$n_s = \left( \frac{3}{4 \cdot \pi} \frac{m_s}{m_H} \right)^{\frac{1}{3}} = 6,571182 \cdot 10^{18}$$

il raggio dell'atomo di idrogeno vale :

$$r_H = R_{11e} \cdot \left( 1 + \frac{m_e}{m_p} \right) = 5,29465448 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Il raggio del Sole risulta :

$$r_s = r_H \cdot (1 + 2 \cdot n_s) = 695843 \text{ K}_m$$

in perfetto accordo con il valore fornito dall'osservazione astronomica.

Sviluppando il calcolo per i diversi valori di  $n_s$ , si ottiene :

$$n_s = 0 \quad ; \quad 1 \quad ; \quad 2 \quad ; \quad 3 \quad ; \quad 4$$

$$A_{n_s} = 1 \quad ; \quad 13 \quad ; \quad 63 \quad ; \quad 176 \quad ; \quad 377$$

$$r_{n_s} = r_0 \quad ; \quad 3 \cdot r_0 \quad ; \quad 5 \cdot r_0 \quad ; \quad 7 \cdot r_0 \quad ; \quad 9 \cdot r_0$$

Secondo le ipotesi che stanno alla base delle teorie correnti, i diversi isotopi **dovrebbero presentare " un valore del raggio nucleare costante " fino alla saturazione dello strato**, con aumento improvviso di due unità quando si passa da uno strato al successivo.

**Solo quando risulta  $n_s \gg 1$  la discontinuità si elimina.** Si ha infatti :

$$A_{n_s} = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot n_s \cdot (n_s + 1) \cdot (2 \cdot n_s + 1) + 1 \simeq \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot 2 \cdot n_s^3$$

da cui si ricava :

$$n_s \simeq \left( \frac{3}{4 \cdot \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot A_{n_s}^{\frac{1}{3}}$$

e quindi :

$$r_A = r_{n_s} = r_0 \cdot (1 + 2 \cdot n_s) \simeq 2 \cdot r_0 \cdot \left( \frac{3}{4 \cdot \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot A_{n_s}^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \left( \frac{6}{\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot r_0 \cdot A_{n_s}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{relazione già nota per altra via})$$

Per i nuclei atomici si ha  $n_s = (1 \div 4)$  e quindi la condizione che abbiamo indicato non è affatto soddisfatta.

L'espressione del raggio del nucleo atomico, che si ricava con le ipotesi che

sono alla base del modello a goccia, non dovrebbe quindi essere quella che viene proposta in quanto **risulta incoerente con le ipotesi stesse**.

Dato però che l'espressione è verificata sperimentalmente, si deve pensare che le condizioni indicate dalle ipotesi fatte non vengano realizzate nel nucleo e che al valore del raggio, fornito dalla relazione sperimentale, **si dovrà dare un significato diverso da quello che è stato indicato**.

A questo punto ricordiamo che, trattando la teoria generale degli spazi rotanti, per il valore massimo del raggio della sfera planetaria, associata allo spazio rotante  $K_p^2$ , in orbita alla distanza  $R_p$  dal centro dello spazio rotante solare  $K_s^2$ , abbiamo ricavato la relazione :

$$r_{pmax} = \left( 4 \cdot \frac{K_p^2}{K_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p$$

nella quale  $r_{pmax}$  rappresenta il raggio della sfera entro la quale deve essere racchiusa la materia che forma la sfera satellite per non perdere massa dalla superficie e quindi per essere stabile.

Se il sistema in esame è un aggregato di protoni con i protoni stessi in orbita, la superficie stabile è assegnata dal limite imposto dalla velocità della luce :

$$r_{pmax} = r_{1P} = \frac{K_p^2}{C_l^2} = \frac{253,2638995 \frac{m^3}{sec^2}}{299792458 \frac{m}{sec}} = 2,81794092 \cdot 10^{-15} m$$

La distanza  $R_p$  indica invece il valore minimo del raggio dell'orbita per avere il sistema stabile ( in astronomia dicevamo per non avere una disgregazione superficiale dovuta agli effetti di marea ).

$R_p$  rappresenta, quindi il raggio della superficie stabile del nucleo centrale compatto, impenetrabile, **che genera lo spazio rotante di valore  $K_s^2$** .

In definitiva,  $R_p$  rappresenta il massimo accostamento al centro dello spazio rotante, che possiamo realizzare con un proiettile proveniente dall'esterno e dunque il valore del raggio che è possibile rilevare con un esperimento di laboratorio.

Il nucleo atomico non è limitato al **nucleo impenetrabile definito da  $R_p$** , ma comprende anche la **fascia protonica orbitale penetrabile**, avente il raggio  $R_{ZNP} \gg R_p$ , che non viene rilevata dalle prove di laboratorio.

Se il nucleo è formato da  $Z$  unità uguali a quelle in orbita, si potrà scrivere :  $K_s^2 = Z \cdot K_p^2$  e quindi si ottiene :

$$R_1 = r_{1P} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{K_s^2}{K_p^2} \right)^{\frac{1}{3}} = r_{1P} \cdot \left( \frac{1}{4} \cdot Z \right)^{\frac{1}{3}}$$

Dall'osservazione sperimentale, per gli isotopi naturali. si ricava la relazione :

$$Z = \frac{A}{1,98 + 0,015 \cdot A^{\frac{2}{3}}} \simeq \frac{A}{2}$$

Sostituendo, si ha l'espressione definitiva del raggio della parte centrale del nucleo atomico ( **nucleo impenetrabile** ) :

$$R_1 = \frac{r_{1P}}{2} \cdot A^{\frac{1}{3}}$$

che fornisce risultati in perfetto accordo con l'osservazione sperimentale. Per esempio, sperimentalmente si ha :

$$R_1(79) = 6 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad ; \quad R_1(238) = 8,68 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

i risultati teorici risultano :

$$R_1(79) = 6,045 \cdot 10^{-15} \text{ m} \quad ; \quad R_1(238) = 8,731 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$



Si verifica così che l'espressione sperimentale ricavata per il raggio nucleare **soddisfa il raggio di una goccia di liquido** solo perchè presenta  $N_s \gg 1$ , ma non è per la stessa ragione che è verificata dal nucleo atomico.

Anzi, essa risulta **in contraddizione con il modello del nucleo a goccia**, che presenta  $N_s = 1 \div 4$ , come risulta dalla tabella seguente, ottenuta con le relazioni che sono state ricavate poc'anzi.

modello	N	Z	I	A	$A_s$	$N_s$	$n_0$	$n_s$
<b>a goccia</b>	8	8	0	16	13		1,11	2
<b>spazi rotanti</b>	8	8	0	16		6	1,75	2
<b>a goccia</b>	33	28	5	61	50		2	2
<b>spazi rotanti</b>	33	28	5	61		5	3,16	4
<b>a goccia</b>	84	60	24	144	95		2,71	3
<b>spazi rotanti</b>	84	60	24	144		24	4,48	5
<b>a goccia</b>	146	92	54	238	140		3,31	4
<b>spazi rotanti</b>	146	92	54	238		36	5,50	6

I risultati che abbiamo ottenuto dimostrano che **il modello nucleare ricavato applicando la teoria degli spazi rotanti** soddisfa perfettamente la relazione sperimentale, **ma per ragioni diverse da quelle indicate dall'analogia. Viene così meno uno dei motivi per cui essa è stata proposta.**

Un altro punto fondamentale dello studio del nucleo atomico è l'osservazione sperimentale secondo la quale :

**l'energia di legame per nucleone assume un valore costante, in prima approssimazione, indipendente dal numero di massa  $A$ .**

Questa osservazione farebbe pensare a una importante proprietà delle forze nucleari : **esse dovrebbero essere a corto range.**

In questo caso infatti ogni singolo nucleone all'interno del nucleo saturerebbe

la sua azione **interagendo solo con i nucleoni circostanti** (solo con quelli che si trovano a contatto) e non con tutti gli  $A$  nucleoni.

Questa particolare condizione (saturazione dell'azione) attribuirebbe a tutti i nucleoni la stessa energia di legame, a patto che ciascuno di essi abbia la possibilità, nell'aggregato, di essere circondato dallo stesso numero di nucleoni.

Questa circostanza non può certamente essere verificata dai nucleoni che si trovano sullo strato periferico, i quali saranno trascurabili solo se il numero di strati  $n_s$  è molto elevato, come si verifica in una goccia di liquido.

Da questo punto di vista il nucleo atomico si trova in una condizione piuttosto sfavorevole, in quanto, ammettendo  $Z_{\max} = 118$  con  $N_{\max} = 175$ , si ottiene  $n_s = 1 \div 3,58$ .

Questo vuol dire che con  $A_{\max} = 293$  si hanno **129 nucleoni interni** mentre quelli superficiali risultano ben **164**.

Dunque per questa via "**la costanza dell'energia di legame per nucleone non viene affatto giustificata**".

Essendo la relazione sperimentale, essa dovrà certamente essere accettata e quindi, se si dimostra sbagliata l'analogia tra il nucleo atomico e la goccia liquida, la giustificazione deve essere ricercata attraverso altre vie.

Vediamo invece come, in maniera lineare e semplice, questa osservazione sperimentale, **si giustifica, attraverso il calcolo teorico, nell'ambito della teoria degli spazi rotanti**.

Studiando l'equilibrio di una sfera materiale in uno spazio rotante centrale, è stato ricavato il valore del raggio della sfera planetaria che consente un moto di rotorivoluzione sincrono in perfetto equilibrio alla distanza  $R_p$  dal centro :

$$r_p = \left( \frac{K_p^2}{K_s^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot R_p \quad \text{da cui :} \quad R_p = \left( \frac{K_s^2}{K_p^2} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot r_p$$

con  $K_s^2 = Z \cdot K_p^2$ , si ottiene :

$$R_{zP} = Z^{\frac{1}{3}} \cdot r_p$$

Analizzando la condizione di equilibrio dei due protoni nel processo di sintesi di un deutone ( $Z = 1$ ), abbiamo ricavato :

distanza tra protone e neutrone :  $R_{11} = r_p = 57,63978486 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

spazio rotante associato al neutrone :  $K_n^2 = - \frac{K_p^2}{2}$

**Il raggio dell'orbita fondamentale del nucleo** avente numero atomico  $Z$ , sarà dunque :

$$R_{zN1} = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}}$$

Tenendo conto della relazione che esprime la quantizzazione delle orbite :

$$R_p = R_1 \cdot p^2$$

il raggio dell'orbita associata al numero quantico  $p$  sarà :

$$R_{zNP} = R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2$$

Ricordando ora la legge fondamentale degli spazi rotanti :

$$V_p^2 \cdot R_p = K_s^2 = Z \cdot K_p^2$$

sostituendo la relazione :

$$K_s^2 = Z \cdot K_n^2 = \frac{Z \cdot K_p^2}{2}$$

**si ricava quindi la velocità della particella in orbita nello spazio rotante nucleare :**

$$V_p = \left( \frac{Z \cdot K_p^2}{2 \cdot R_p} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{Z \cdot K_p^2}{2 \cdot R_{11} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot p^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi :

$$V_p = \left( \frac{K_p^2}{2 \cdot R_{11}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot Z^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{p}$$

**Per ciascuna particella in orbita si ricava così il valore teorico l'energia di legame :**

$$E_{1PP} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_p^2 = m_1 \cdot \left( \frac{K_p^2}{2 \cdot R_{11}} \right) \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2}$$

Nel processo di sintesi del deutone abbiamo visto che la massa in orbita non è quella del protone, ma  $m_1 = \frac{3}{4} \cdot m_p$ , in quanto  $\frac{1}{4} \cdot m_p$  si utilizza per

**polarizzare il neutrone accoppiato** . Si ha quindi definitivamente :

$$E_{1PP} = \left( \frac{3 \cdot K_p^2 \cdot m_p}{8 \cdot R_{11}} \right) \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2 \cdot p^2}$$

Si noti che tutte le particelle che occupano il livello  $p$  sono legate allo spazio rotante centrale ( e dunque al nucleo centrale ) dallo stesso valore di energia.

Se dunque consideriamo il livello  $p$  saturo, il numero di particelle su di esso presenti sono  $n_p = 2 \cdot p^2$  e quindi il valore dell'energia che lo spazio rotante trasferisce a tutto lo strato sarà :

$$E_0(Z) = E_{1PP} \cdot (2 \cdot p^2) = \left( \frac{3 \cdot K_p^2 \cdot m_p}{8 \cdot R_{11}} \right) \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

indipendente dal livello considerato.

**Questa rappresenta una proprietà fondamentale degli spazi rotanti.**

Sostituendo i valori numerici, si ottiene :

$$E_0(Z) = 17,20163 \text{ MeV} \cdot Z^{\frac{2}{3}}$$

Sostituendo  $Z \simeq \frac{A}{2}$ , si può scrivere :

$$E_0(A) \simeq 10,83635 \text{ MeV} \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

Se moltiplichiamo l'energia per strato  $E_0(A)$  per il numero di strati (o livelli) occupati  $n_0$ , otteniamo l'energia di legame di tutte le particelle in orbita.

Abbiamo visto che, con la sintesi di deutoni in orbita, i livelli occupati vengono definiti non dai protoni, ma **dai neutroni**, secondo la relazione :

$$N = \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1) \cdot (2 \cdot n_0 + 1)}{3}$$

Per gli isotopi naturali  $n_s$  assume valori bassi, compresi nell'intervallo  $2 \div 5$ ,

e quindi si si può assumere  $N \simeq n_0^3$ . Si ricava dunque :  $n_0 \simeq N^{\frac{1}{3}}$   
sostituendo, si ottiene quindi l'energia di legame :

$$E_{ZN}(A) \simeq 17,20163 \text{ MeV} \cdot Z^{\frac{2}{3}} \cdot N^{\frac{1}{3}}$$

sostituendo ancora :  $Z \simeq \frac{A}{2}$  ;  $N \simeq \frac{A}{2}$  si ottiene :

$$E_{ZN}(A) \simeq 8,6008 \text{ MeV} \cdot A$$

in perfetto accordo con i rilievi sperimentali.

Per completare l'analisi approssimata che abbiamo fatto, ricordiamo che, se in orbita, nel nucleo, è presente un numero di deutoni pari al numero isotopico, all'energia che abbiamo calcolato bisogna aggiungere quella di legame dei deutoni. Si avrà quindi :

$$E_{ZN}(Z ; N) \simeq E_0(Z) \cdot N^{\frac{1}{3}} + 2,224 \text{ MeV} \cdot (N - Z)$$

Un altro parametro, che si ricava facendo ricorso all'analogia con il nucleo a goccia, è il numero di nucleoni presenti sull'ultimo strato. Si ha infatti :

$$\begin{aligned} A_s &= \frac{4 \cdot \pi \cdot r_A^2}{(2 \cdot r_0)^2} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot (2 \cdot n_s)^2}{(2 \cdot r_0)^2} = \pi \cdot (2 \cdot n_s)^2 \\ &= \pi \cdot (2 \cdot n_s)^2 = 2 \cdot \pi \cdot (2 \cdot n_s^2) \end{aligned}$$

Si noti che  $(2 \cdot n_s^2)$  rappresenta il numero di particelle in orbita ed il fattore  $2 \cdot \pi$  è dovuto al passaggio dal piano allo spazio.

Il numero totale dei nucleoni, se si verifica  $n_s \gg 1$ , vale :

$$A_{n_s} = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot n_s \cdot (n_s + 1) \cdot (2 \cdot n_s + 1) \simeq \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot 2 \cdot n_s^3$$

da cui si ricava 
$$n_s \simeq \left( \frac{3}{4 \cdot \pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot A_{n_s}^{\frac{1}{3}}$$

e quindi si ha il numero di nucleoni per strato :

$$A_s = (36 \cdot \pi)^{\frac{1}{3}} \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

Anche questa relazione è certamente verificata da una goccia di liquido, ma non dal nucleo atomico che presenta un numero di strati molto ridotto.

Anche se l'analogia del nucleo atomico con una goccia risulta assolutamente inutile, l'espressione dell'energia di legame, che si ricava facendone ricorso, fornisce valori accettabili in un ampio intervallo di valori di  $Z$  e  $N$ .

Questo si verifica perchè, come vedremo, l'analogia viene citata spesso, ma in realtà **nei calcoli non troviamo nessun riferimento ad essa**, ma solo a risultati sperimentali.

**In realtà si risolve il problema matematico di cercare un'espressione teorica, che sia capace di descrivere una curva assegnata, ma non la giustificazione della curva attraverso l'analisi dei processi fisici che la determinano.**

Cerchiamo dunque un'espressione del tipo :

$$E_g(Z ; N) = \alpha \cdot f_1(Z ; N) + \beta \cdot f_2(Z ; N) + \gamma \cdot f_3(Z ; N) + \delta \cdot f_4(Z ; N) + \dots$$

dove ciascuna funzione viene definita sulla base di osservazioni sperimentali oppure considerazioni di carattere fisico.

I coefficienti verranno invece determinati facendo coincidere la funzione con valori noti di  $E_g(Z ; N)$  , opportunamente scelti.

Considerando che all'interno del nucleo una particella ne ha **sei** confinanti, se si associa l'energia di legame  $e_1$  ad un solo legame, il contributo di ciascuna di esse sarà  $6 \cdot e_1$  .

Se  $A$  è il numero delle particelle presenti in tutto il nucleo, complessivamente

l'energia di legame sarà :

$$E_1(Z ; N) = 6 \cdot e_1 \cdot \frac{A}{2}$$

dove la divisione per  $2$  è necessaria perchè altrimenti un legame verrebbe

considerato due volte, da X verso Y e da Y verso X.

Sappiamo che l'osservazione sperimentale più importante è che, variando  $Z$  ed  $N$  con  $A$  costante, l'energia di legame varia di poco, mantenendosi su un valore medio di circa  $8 \text{ MeV}$ .

Naturalmente, questo rappresenta il risultato fornito da tutti gli effetti che sono stati indicati, agenti contemporaneamente.

Se poniamo  $f_1(Z; N)$  ad indicare questo risultato, il primo contributo sarà :

$$E_1(Z; N) = \alpha \cdot A = \frac{6 \cdot e_1}{2} \cdot A$$

Se il nucleo fosse analogo a una goccia liquida ( numero di strati  $n_s \gg 1$  ), il valore atteso del coefficiente sarebbe  $\alpha \simeq 8 \text{ MeV}$ .

Questo valore di energia è stato calcolato considerando tutti i nucleoni legati alla stessa maniera.

In realtà, quelli che si trovano sulla superficie hanno metà legami e quindi ad

essi bisogna detrarre un contributo pari a  $\frac{\alpha}{2}$  .

Il numero di particelle che occupano lo strato periferico del nucleo, anche se utilizziamo l'analogia con la goccia, essendo molto basso il numero di strati, non soddisfa la relazione che è stata ricavata, ma :

$$A_s(N) \simeq 5 \cdot N^{\frac{2}{3}} \simeq 7 \cdot N^{\frac{4}{7}}$$

Ritenendo **arbitrariamente**  $n_s \gg \gg 1$  , si assume :  $R_{n_s} = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$

e quindi si ricava :

$$A_s = \frac{S}{s} = \frac{4 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot A^{\frac{2}{3}}}{(2 \cdot r_0^2)} = \pi \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

che corrisponde all'approssimazione :



$$A_s(N) \simeq 5 \cdot N^{\frac{2}{3}} \simeq 5 \cdot \left( \frac{A}{2} \right)^{\frac{2}{3}} \simeq \pi \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

Se esprimiamo queste considerazioni con il termine  $f_2(Z; N)$ , poniamo :

$$E_2(Z; N) = -\beta \cdot A^{\frac{2}{3}} \quad \text{con} \quad \beta = \frac{3 \cdot e_1}{2} \cdot \pi$$

L'aspettativa per il coefficiente sarà :  $\beta \simeq 4 \cdot \pi = 12,56 \text{ MeV}$ .

A questo punto si considera la forza di repulsione tra i protoni, **che vengono immaginati uniformemente distribuiti** e, con la solita approssimazione, si calcola l'energia potenziale associata, con il metodo classico.

Consideriamo quindi una sfera di raggio  $r_A$  contenente una **carica elettrica**  $(Z \cdot e)$ , **uniformemente distribuita**.

La densità di carica sarà :

$$\delta_q = \frac{Z \cdot e}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_A^3}$$

Approssimando con funzioni continue, alla generica distanza  $r$  dal centro, la carica elettrica racchiusa nella sfera sarà :

$$q(r) = \delta_q \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \quad ; \quad dq(r) = \delta_q \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr$$

l'energia di legame tra la carica interna  $q(r)$  e lo strato  $dq(r)$  risulta :

$$dE = 10^{-7} \cdot C_1^2 \cdot \frac{q(r) \cdot dq(r)}{r^2} \cdot r$$

integrando e sostituendo  $r_A \simeq r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ , si ottiene :

$$E_3(Z; N) = \int_0^{r_A} dE = \frac{3 \cdot 10^{-7} \cdot C_1^2 \cdot e^2}{5 \cdot r_0} \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} = -\gamma \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$$

il coefficiente atteso è dunque :  $\gamma = \frac{3 \cdot 10^{-7} \cdot C_1^2 \cdot e^2}{5 \cdot r_0} \simeq 0,613 \text{ MeV}$ .

A questo punto osserviamo che i nuclei atomici presentano diversa stabilità, in rapporto al valore di  $Z$  e  $N$ . E' chiaro che quelli che realmente esistono in natura avranno valori di  $Z$  e  $N$  corrispondenti alla massima stabilità e sono

individuati dalla relazione sperimentale :  $Z_s \simeq \frac{A}{2 + 0,015 \cdot A^{\frac{2}{3}}}$

dalla quale si ricava la relazione, valida per i nuclei stabili :

$$I = A - 2 \cdot Z \simeq 0,015 \cdot Z \cdot A^{\frac{2}{3}}$$

Sempre sperimentalmente, si osserva che, allontanandosi da questa curva, sia aumentando che diminuendo il numero isotopico  $I = N - Z = A - 2 \cdot Z$ , la stabilità diminuisce e quindi diminuisce l'energia di legame per nucleone. Per tener conto di queste osservazioni, si pone :

$$f_4(Z; N) = \frac{I^2}{A}$$

sostituendo nell'espressione di  $E_g(Z; N)$ , si ottiene :

$$E_g(Z; N) = \alpha \cdot A - \beta \cdot A^{\frac{2}{3}} - \gamma \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + \delta \cdot \frac{(A - 2 \cdot Z)^2}{A}$$

derivando e uguagliando a zero, **si ricava la curva sulla quale si trovano i nuclei in corrispondenza dei quali si ha la massima stabilità.**

$$\left( \frac{dE_g(Z; N)}{dZ} \right)_{A = \text{cost}} = -2 \cdot \gamma \cdot \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} - 4 \cdot \delta \cdot \frac{(A - 2 \cdot Z)}{A} = 0$$

ossia :

$$-2 \cdot \gamma \cdot \frac{Z}{A^{\frac{1}{3}}} - 4 \cdot \delta \cdot \frac{0,015 \cdot Z \cdot A^{\frac{2}{3}}}{A} = 0 \quad \text{da cui : } \delta = -33,333 \cdot \gamma$$

In definitiva, l'energia per nucleone  $E_g(A)$  in funzione della sola variabile  $A$  diventa :

$$\begin{aligned} \frac{E_g(Z; N)}{A} &= \alpha - \beta \cdot \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} - \gamma \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} - 33,333 \cdot \gamma \cdot \frac{(0,015)^2 \cdot Z^2 \cdot A^{\frac{4}{3}}}{A} \\ &= \alpha - \beta \cdot \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} - \gamma \cdot \frac{A^{\frac{2}{3}}}{\left(2 + 0,015 \cdot A^{\frac{2}{3}}\right)^2} - 33,333 \cdot \gamma \cdot \frac{(0,015)^2 \cdot A^{\frac{4}{3}}}{\left(2 + 0,015 \cdot A^{\frac{2}{3}}\right)^2} \end{aligned}$$

Diagrammando la funzione  $E_g(A) = f(A)$ , con i valori sperimentali, risulta un massimo in prossimità di  $A = 60$  e quindi, derivando e ponendo :

$$\left( \frac{dE_g(A)}{dA} \right)_{A=60} = 0 \quad \text{si ricava il valore : } \beta = 19,605 \cdot \gamma$$

Sperimentalmente, sempre per  $A = 60$ , si ottiene  $E_g(60) = 8,818$  MeV/nuc, che, sostituito nell'espressione teorica, ci consente di ricavare il valore del coefficiente  $\alpha$ , che risulta :

$$8,818 = \alpha - \frac{19,605 \cdot \gamma}{3,91487} - \gamma \cdot \frac{15,32619}{(2,20989)^2} - 33,333 \cdot \gamma \cdot \frac{0,052851}{(2,20989)^2}$$

da cui si ottiene :  $\alpha = 8,5069 \cdot \gamma + 8,818$

Facendo riferimento alle osservazioni sperimentali, viene infine aggiunto un termine, detto di parità, che tiene conto del diverso comportamento dei nuclei (pari-pari), (dispari-dispari) e (pari-dispari). Vengono proposte diverse

espressioni la più comune delle quali è :  $\pm \frac{33}{A^{\frac{3}{4}}}$

dove il segno + vale per i nuclei (p-p), il - per i (d-d), mentre si assume nullo per A dispari.

A questo punto bisogna definire il valore del coefficiente  $\gamma$ , che può essere assunto uguale a quello teorico oppure tale da fornire il valore dell'energia di legame di un nucleo noto. Noi utilizzeremo comunque il valore che è ricavato teoricamente.

L'espressione definitiva dell'energia di legame risulta quindi :

$$E_g = 14,033 \cdot A - 12,018 \cdot A^{\frac{2}{3}} - 0,613 \cdot \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - 20,433 \cdot \frac{|^2}{A} \pm \frac{33}{A^{\frac{3}{4}}}$$

I coefficienti sono stati calcolati sempre utilizzando i valori sperimentali delle masse atomiche ed **il loro valore varia a seconda del metodo usato.**

In tabella riportiamo quelli di uso più comune ( Wapstra usa come termine di parità  $\pm 11 / \sqrt{A}$  ).

coeff.	calc.app.	Weizsacker	Green	Wapstra	Rohlf	altri
$\alpha$	14,033	15,565	15,753	15,835	15,75	14,1
$\beta$	$\frac{12,018}{25,887}$	17,233	17,804	18,33	17,80	13
$\gamma$	0,613	0,699	0,708	0,714	0,711	0,595
$\delta$	20,433	23,287	23,69	23,2	23,70	19

Nella tabella che segue riportiamo il confronto tra i valori sperimentali ( S ) e quelli calcolati con le diverse espressioni empiriche.

I valori calcolati con l'espressione che abbiamo ricavato senza alcuna forma di **ottimizzazione dei coefficienti (C)**, sono stati ottenuti utilizzando i valori teorici, con la sola sostituzione del secondo termine con  $E_2 = 25,887 \cdot N^{\frac{4}{7}}$ , che tiene conto del basso numero di strati presenti nel nucleo.

N	B <sub>5</sub> <sup>11</sup>	O <sub>8</sub> <sup>16</sup>	Ne <sub>10</sub> <sup>21</sup>	Mg <sub>12</sub> <sup>25</sup>	Ca <sub>20</sub> <sup>43</sup>	Ni <sub>28</sub> <sup>60</sup>	Zn <sub>30</sub> <sup>70</sup>	Sn <sub>50</sub> <sup>117</sup>	Yb <sub>70</sub> <sup>173</sup>	Bi <sub>83</sub> <sup>209</sup>	U <sub>92</sub> <sup>238</sup>
$\frac{S}{C}$	$\frac{74.722}{73.547}$	$\frac{127.49}{128.14}$	$\frac{169.36}{169.60}$	$\frac{206.89}{207.72}$	$\frac{368.43}{373.84}$	$\frac{529.10}{527.73}$	$\frac{609.04}{607.54}$	$\frac{998.51}{991.93}$	$\frac{1393.5}{1394.2}$	$\frac{1640.2}{1630.0}$	$\frac{1801.7}{1806.3}$
$\frac{We}{G}$	$\frac{76.005}{75.111}$	$\frac{125.99}{125.14}$	$\frac{169.25}{168.50}$	$\frac{206.43}{205.79}$	$\frac{373.10}{373.06}$	$\frac{525.12}{525.74}$	$\frac{612.30}{613.22}$	$\frac{994.05}{996.79}$	$\frac{1396.4}{1400.8}$	$\frac{1628.7}{1633.9}$	$\frac{1802.6}{1808.8}$
$\frac{Wa}{R}$	$\frac{73.177}{75.063}$	$\frac{121.59}{125.04}$	$\frac{166.03}{168.36}$	$\frac{203.07}{205.60}$	$\frac{369.55}{372.64}$	$\frac{521.42}{525.02}$	$\frac{609.36}{612.41}$	$\frac{991.95}{994.98}$	$\frac{1396.4}{1397.7}$	$\frac{1629.9}{1629.8}$	$\frac{1806.1}{1804.0}$
$\frac{E_0}{T}$	$\frac{50.374}{69.264}$	$\frac{72.448}{126.78}$	$\frac{82.995}{165.99}$	$\frac{98.815}{208.61}$	$\frac{132.80}{339.38}$	$\frac{175.38}{526.14}$	$\frac{199.59}{611.24}$	$\frac{272.51}{1004.9}$	$\frac{331.51}{1392.3}$	$\frac{368.95}{1645.5}$	$\frac{387.87}{1799.7}$

Sull'ultima riga è stato riportato il valore dell'energia di legame calcolato con l'espressione teorica ricavata con la teoria degli spazi rotanti, utilizzando la energia per strato  $E_0(N)$  riportata a pagina 756 e considerando tutti i livelli occupati con regolarità, senza alcun vuoto, come previsto dalla relazione :

$$E_{ZN}(Z; N) = E_0(N) \cdot \left[ (p_s - 1) + \frac{n_p}{2 \cdot p_s^2} \right]$$

Il risultato, già più che buono, potrà essere migliorato ancora, considerando la presenza dei deutoni in orbita.

Ossevando la **tabella dei pesi** dei diversi effetti nucleari che sono stati presi in considerazione per ricavare l'espressione dell'energia di legame, si vede chiaramente che il legame con il modello proposto risulta molto scarso.

Dato però che le formule empiriche ricavate **soddisfano** comunque i risultati sperimentali, è necessario capire le ragioni per le quali ciò accade. Per fare questo, prendiamo in considerazione i valori sperimentali dell'incremento che subisce l'energia di legame del nucleo quando ad esso **viene aggiunto un protone oppure un neutrone**.

I valori che si ottengono sono quelli riportati nelle tabelle seguenti.

